二、有向图的矩阵

1、关联矩阵

定义 25:给定无环有向图

$D=\langle V,E\rangle$，$V=\{v_1,\cdots,v_n\}$，$E\{e_1,\cdots,e_m\}$，

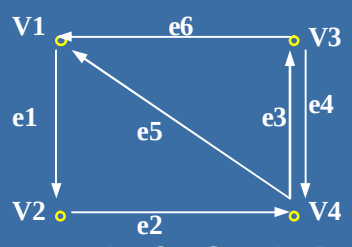
定义一个 $n\times m$ 阶矩阵。

$M(D)=(m_{ij})_{n\times m}$，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & \text{结点}v_i\text{是边}e_i\text{的始点。}\\ 0, & \text{结点}v_i\text{与边}e_i\text{不关联。}\\ -1, & \text{结点}v_i\text{是边}e_i\text{的终点。}\end{cases}$$

则称 M（D）为 D 的关联矩阵。

例：



$$M(D)=\begin{array}{c}\\ v1\\ v2\\ v3\\ v4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

特点:

1) 每列元素中有一个 1 和一个-1,对应一个始点,

一个终点,元素和为零。

2) 每行元素的绝对值之和为对应点的度数。

-1 的个数等于入度,1 的个数等于出度。

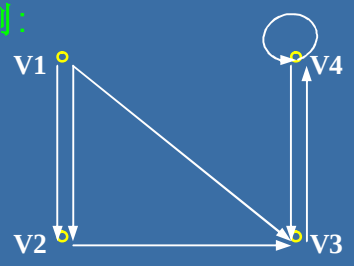
3)在 M(D)中所有元素的和等于零。

2、邻接矩阵

定义 26:设有向图 $D=<V,E>$, $V=\{v_1,\cdots,v_n\}$。

令 a_{ij} 是 v_i 邻接 v_j 的边的数目,(即从 v_i 到 v_j 的有向边的条数,是指从 v_i 指向 v_j 的边)则称 $(a_{ij})_{n\times n}$ 为 D 的邻接矩阵,记为 A(D)。

例:



$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v1 & v2 & v3 & v4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

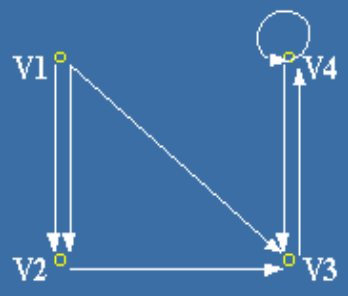
特点:

1)有向图的邻接矩阵未必是对称的。

2)每行和等于对应点的出度,每列和等于对应点的入度。

3) 所有元素和等于图的边数,即长度为 1 的通路条数。

$$A^2(D) = \begin{array}{c} v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$



$a_{ij}^{(2)}$ 表示从 v_i 到 v_j 长度为 2 的通路的条数。

例：$a_{13}^{(2)} = 2$，表示从 v_1 到 v_3 长度为 2 的通路有两条。

因为：$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \cdots + a_{in}a_{nj}$

$a_{ik}a_{kj} = 1$，充分条件是 $a_{ik} = 1$ 且 $a_{ki} = 1$。

说明：$v_i \to v_k$ 有边，$v_k \to v_j$ 有边，从而有一条

长度为 2 的通路 $v_i \to v_k \to v_j$，从而以上结论成立。

定理 8：设 A(D) 是图 G 的邻接矩阵。

$A_{(D)}^{l} = (a_{ij}^{(l)})_{n \times n}$；$a_{ij}^{(l)}$ 等于 G 中结点，v_i 到 v_j 有长度为 L

的通路的条数。

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)}$ 表示 G 中有长度为 L 的通路的总的条数。

$$A^3(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^4(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

令 $B_r(D) = A(D) + A^2(D) + \cdots + A^r(D)$

$b_{ij}^{(r)}$ 表示 D 中从 v_i 到 v_j 长度小于 r 的通路的条数。

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(r)}$ 表示 D 中长度小于 r 的通路的总的条数。

在刚才的图中

$$B_4(D) = A(D) + A^2(D) + A^3(D) + A^4(D) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

3、可达矩阵:

定义 27:设有向图 D=<V,E>,V={v_1,v_2,…,v_n},

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, v_i\text{可达}v_j \\ 0, v_i\text{不可达}v_j \end{cases}$$

记 $P(D) = (P_{ij})_{n\times n}$,

称 P(D)为 D 的可达矩阵。

求可达矩阵的方法:

设 D 有 n 个结点,令 $B_n(D) = A(D) + A^2(D) + L + A^n(D)$

将 B_n 中所有不为零的元素改为 1,对角元素也

改为 1,(因 v_i 到自身也是可达的),B_n 的零元仍然

为零就形成了 D 的可达矩阵。

在例中

$$B_4(D) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \end{pmatrix} \quad \backslash \quad P(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

在具体计算中可以将 $A(D)$,$A^2(D)$,$A^3(D)$,$A^4(D)$

通过改为布尔矩阵(元素仅为 0 或 1),矩阵的乘法

和加法中的运算改为布尔运算。

§5.4 最短路径和关键路径问题

权图的概念：

定义 16:无向图 G＝<V,E>中,对于 G 的任意

一条边(v_i,v_j),都给以一个实数与之对应,——W_{ij},

称W_{ij}为边(v_i,v_j)的权,每边均带有权的图称为带权图,

记为$G=<V,E,W>$,其中 W 是权的集合。

在实际应用中,权的含义可以是:距离、费用、容量、

流量、工时等。

一、最短路问题:

1．最短路的定义

定义 17:在带权图中给定结点v_i和v_j,在v_i到v_j所有

通路中,各边权和最小的通路称为从v_i到v_j的最短路,

该最短路的各边权和称为v_i到v_j的距离,记为$d(v_i,v_j)$。

最短问题,在实际中可应用于铁路的铺设,运输的

最小费用,线路的安排,工序统筹安排时间的最小等。

2．最短路的狄克斯特拉算法(DijKstra)

问题的提法,在带权无向图

$G=<V,E,W>$,任意取一点 a∈V,

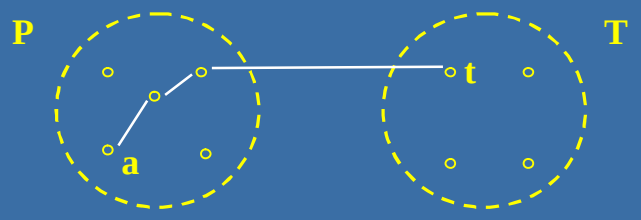
求 a 点到 G 中其它各点的最短路及最小距离。

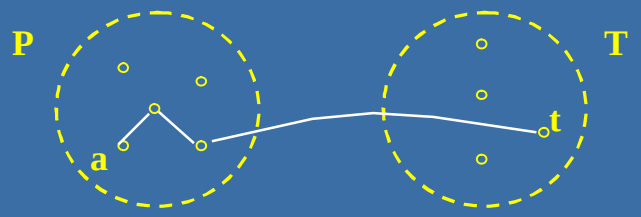
点 t 关于 P 的指标 L(t):

设 TÍV,且 aÏT,令 P＝V-T,对 T 的每个点 t,

找出所有从 a 到 T 的且不包含 T 中其它结点的路,

设这些路中的最小权和为 L(t),如果这样的路不存在,可令 L(t)=+∞,我们称 L(t)为 t 关于点集 P 的指标。(注意 L(t)未必是 G 中从 a 点到 t 的最短路的距离)。





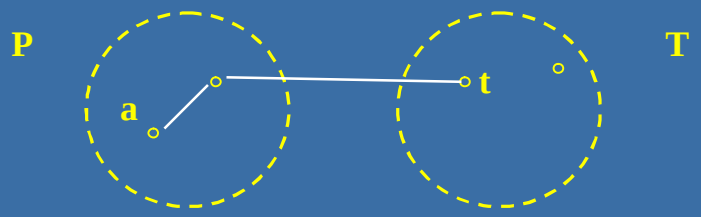
第一步:设 P={a},T=V−{a},此时"t∈T,

t 关于 P 的指标为:

$$L(t)=w(a,t)=\begin{cases} w, & \text{若a,t相邻，是（a,t）上的权} \\ +\infty, & \text{若a,t不相邻} \end{cases}$$

第二步:求出 T 中关于 P 的最小指标点 x,即 x 满足

L(x)=min{L(t),t∈T}



此时 L(x)就是 a 到 x 的最小距离。

第三步:设 $P_1(t)=P\cup\{x\}$,

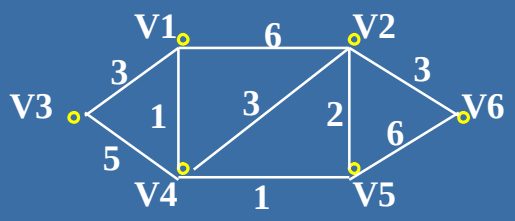
T1=T−{x},"t∈T,此时 t 关于 P 的指标为

$L_1(x)=\min\{L(t),L(x)+w(x,t)\}$,

转入第二步。

如此一直下去,直到所有点均转入P,T＝Æ为止。

例:求图中v_3到其它各点的最小距离和最短路径



解:(1)P={ v_3 } , T={ v_1, v_2, v_4, v_5, v_6 } ,

$L_1(v_1) = 5$, $L_1(v_i) = +¥, i = 2,5,6$

(2) v_1 是最小结点指标 $L_1(v_3) = 3$,

\ $d(v_3, v_1) = 3$,

$P_1 = \{V_3, V_1\}$, $T_1 = \{V_2, V_4, V_5, V_6\}$

$L_2(v_2) = \min\{L_1(v_2), L_1(v_1) + w(v_1, v_2)\} = 9$

$L_2(v_4) = \min\{L_1(v_4), L_1(v_1) + w(v_1, v_4)\} = 4$

$L_2(v_5) = \min\{L_1(v_5), L_1(v_1) + w(v_1, v_5)\} = +¥$

$L_2(v_6) = \min\{L_1(v_6), L_1(v_1) + w(v_1, v_6)\} = +¥$

(3)此时最小指标为 $L_2(v_4) = 4$

\ $d(v_3, v_4) = 4$, 路径是 v_3 ® v_1 ® v_4

$P_2 = \{V_3, V_1, v_4\}$, $T_1 = \{V_2, V_5, V_6\}$,

$L_3(v_2) = \min\{L_2(v_2), L_2(v_4) + w(v_4, v_2)\} = 7$

$L_3(v_5) = \min\{L_2(v_5), L_2(v_4) + w(v_4, v_2)\} = 5$

$L_3(v_6) = \min\{L_2(v_6), L_2(v_4) + w(v_4, v_2)\} = +¥$

(4)此时最小指标为 $L_3(v_5) = 5$,

\ $d(v_3, v_5) = 5$, 路径为 v_3 ® v_1 ® v_4 ® v_5

$L_4(v_2) = \min\{L_3(v_3), L_3(v_5) + w(v_5, v_2)\} = 7$

$L_4(v_6) = \min\{L_3(v_6), L_3(v_6) + w(v_5, v_6)\} = 11$

(5)此时最小的指标是 $L_4(v_2) = 7$,

\ $d(v_3, v2) = 7$,

路径是 v_3 ® v_1 ® v_4 ® v_5 ® v_2 或 v_3 ® v_1 ® v_4 ® v_2

$P_4 = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$, $T_1 = \{V_6\}$

$$L_5(v_6) = \min\{L_4(v_6), L_4(v_2) + w(v_2, v_6)\} = 10$$

\ $d(v_3, v_6) = 10$，路径为 v_3 ® v_1 ® v_4 ® v_2 ® v_6