二、对称性

1、定义:定义 12:设 R 是 A 上的关系，

"a,b∈A,如果<a,b>∈R,则必有<b,a>∈R，

则称 R 为 A 上的对称关系,或称 R 具有对称性。

例:

R1＝{<1,1>,<2，3>,<3,2>},R1 是对称的，

R2＝{<1,1>,<3,3>},R2 是对称的，

R3＝{<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,1>},

R3 不是对称的,因<3,1>∈R,而<1,3>ÏR。

说明:

<1> 由定义得如 R 是对称关系,则如<a,b>ÏR，

则必有〈b，a〉ÏR。

<2> 诸如<a,a>,<b,b>这种有序对是否属于

R 对 R 的自反性，没有影响。

2、典型例子：

例:R 是 Z 上的模 5 同余关系,则 R 是对称关系，

证明:R＝{<x,y>|x,y∈Z,$\frac{x-y}{5}$∈Z}

"x,y∈Z,如果<x,y>∈R，

则$\frac{x-y}{5}$∈Z,所以,$\frac{y-x}{5}$＝-$\frac{x-y}{5}$∈Z

∴<y,z>∈R,∴R 具有对称性。

R 是 N 上的互质关系,R 具有对称性。因为,

如 x,y 互质,y,x 也是互质的。其余，人与

人的同学关系，同姓关系，也是对称关系。

3、对称关系的关系矩阵和关系图。

对称关系的关系矩阵是对称矩阵，即 $r_{ij}=r_{ji}$，

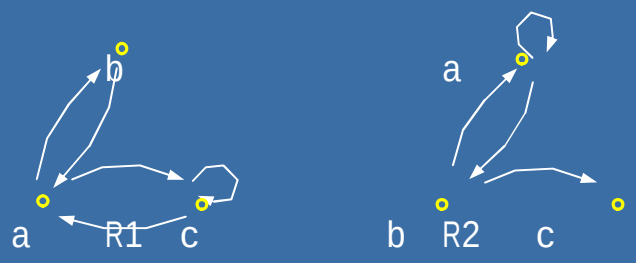
因 $r_{ij}=1 \Leftrightarrow <a_i,a_i>\in R \Leftrightarrow <a_i,a_i>\in R \Leftrightarrow r_{ij}=1$

∴一切 i，j，$r_{ij}=r_{ji}$

对称矩阵的关系图的特点是任何两个不同的结点之间，或者是一来一回两条弧，或者是没有弧。

是否有自回路，对对称性没有影响。

例如，左边是对称的，右边不是对称的。



因而，全 E_A，空关系Æ，恒等关系IA，均是对称关系。

4、结论：R 是 A 上对称关系的主要条件是 $R^{-1}=R$，

注：结论可以减弱为 $R^{-1}\subseteq R$，因 $R^{-1}\subseteq R \Rightarrow R^{-1}=R$。

证明：

充分性，"a，b∈A，如<a，b>∈R，则<b，a>∈R^{-1}，

因 $R^{-1}=R$，故<b，a>∈R，∴R 是对称的。

必要性，"<a，b>∈R^{-1}，则<b，a>∈R，因 R 对称，

则<a，b>∈R，∴$R^{-1}\subseteq R$，"<a，b>∈R，因 R 对称，

∴<b，a>∈R，∴<a，b>∈R^{-1}，∴$R\subseteq R^{-1}$，

从而得 $R=R^{-1}$。

例 3:设 $A=\{a,b,c\}$,

$R=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,b>\}$

$S=\{<a,a>,<c,c>\}$,

$T=\{<a,c>,<b,b>\}$,

R,S 是对称关系,T 不是对称关系。

定理 8:设 R,S 是 A 上对称关系,则 R^{-1},$R\cup S$,

$R\cap S$,也是 A 上的对称关系。

证明:"$<a,b>\in R\cup S$,

则$<a,b>\in R$ 或$<a,b>\in S$,

由 R,S 是对称的,则$<b,a>\in R$ 或$<b,a>\in S$

则$<b,a>\in R\cup S$,故 $R\cup S$ 是对称的。

三、反对称关系:

1.定义 定义 12:如果 R 是 A 上的关系,

"a,b∈R 如果$<a,b>\in R$ 且$<b,a>\in R$,

则必有 a=b,称 R 是 A 上的反对称关系,

或称 R 具有自反性。

说明:

<1>该定义的等价说法:

"a,b∈A,如 $a\neq b$,$<a,b>\in R$,

则必有$<b,a>\ddot{I}R$。即两个不同点结点间

不允许有两条弧。

<3> 该定义的否命题说法并不成立,如

“a≠b,<a,b>ÏR,则<b,a>∈R”并不成立,

即反对称关系的关系图允许两个不同点间没有弧。

例 4:设 A＝{a,b,c},A 的关系 R,S,T 为

R＝{<a,a>,<b,b>},

S＝{<a,b>,<a,c>},

T＝{<a,b>,<b,a>,<a,b>}

R,T 是反对称的。而 T 不是反对称的,

因<a,b>∈R,且<b,a>∈R。

2.典型例子:

例:R 是 N 上的整除关系,即

R＝{<x,y>|x,y∈N,y/x∈N},

显然,如果 x 能整除 y,且 x≠y,

则 y 不能整除 x。所以 R 是反对称的。

注意:存在两数 a、b∈N,

a 不能整除 b,b 也不能整除 a,

即<a,b>ÏR,<b,a>ÏR。

例:A 是某集合,R 是 P(A)上的包含关系。

因 u、v∈P(A),如 u≠v,且 uÍv,则必有 v⊆u, /

所以,包含关系 R 是反对称关系。

换一种说法按定义 12,如 u,v∈P(A),

如 uÍv,vÍu,则必有 u=v,

∴包含关系是反对称关系。

例:R 是实数集合上≤的关系

因"x,y∈实数集,如 x≠y,且 x≤y,

则 y≤x 不成立,则≤关系是反对称关系。

按定义 12,如 x≤y,且 y≤x,则必有 x=y,

所以≤是一个反对称关系。

其它例如≥,<,>关系,人与人的父子关系,

领导与被领导关系均是反对对称关系。

3.反对称关系的关系矩阵和关系图

R 是反对称关系,则其关系矩阵如果在

非对角元上 $r_{ij}=1$,则在其对称位置上,

$r_{ji}=0$,即 r_{ij} 和 r_{ji} $(i\neq j)$这两个数至多

一个是 1,但允许两个均为 0。

其关系图的特点是:任何两个不同的结点之间,

至多有一条弧,但允许是没有弧。

4.结论

R 是 A 上反对称关系的充要条件是 $R\text{Ç}R^{-1}\text{Í}I_A$。

定理 9:设 R 和 S 是 A 上的反对称关系,

则 R^{-1},RÇS,也是 A 的反对称关系。

证明:"a,b∈A,如 a≠b,且<a,b>∈R∩S,

则<a,b>∈R 且<a,b>∈S,因 R,S 是反对称关系,

∴<b,a>ÏR 且<b,a>ÏS，

∴ 〈a,b〉 ÏR∩S,所以 R∩S 也是反对称关系。

注意:

<1> R,S 均是反对称关系,未必能得出 RÈS

是反对称关系。

例:R＝{<a,b>},S＝{<b,a>},R,S 均是反对称的,

但 RÈS＝{<a,b>,<b,a>}却不是反对称的。

<2>存在关系,它既不是对称的,也不是反对称的。

例:R＝{<a,b>,<b,a>,<a,c>}，

也存在关系,它既是对称的,也是反对称的,

例如 R＝{<a,a>,<c,c>}

<3>空关系Æ,恒等关系即是对称,也是反对称,

全关系 E_A 不是反对称的。

四、传递性

1.定义 定义 13:设 R 是 A 上的关系,

"a,b,c∈A,如果<a,b>∈R,<b,c>∈R,

则必有<a,c>∈R,则称 R 为 A 上的传递关系,

或称 R 具有传递性。

例:R1＝{<x,y>,<z,x>,<z,y>},是传递关系。

R2＝{<a,b>,<c,d>}也是传递关系,它

并没有违背定义的要求。

其关系图为

R3＝{<a,b>,<b,a>},R3 不是传递关系，

因<a,b>∈R,<b,a>∈R,但<a,a>,<b,b>

均不属于 R,所以 R 不是传递的。

2.典型例子：

例:整除关系 D_N 是 N 上的传递关系

证明:"x,y,z∈N,如<x,y>∈D_N,<y,z>∈D_N,

即 x 能整除 y,且 y 能整除 z,则必有 x 能整除 z,

即<x,z>∈D_N。所以整除关系具有传递性。

例:P(A)上的包含关系Í,具有传递性

因若 uÍv,vÍw,则必有 uÍw。

例:实数集上的≤关系具有传递性

因若 x≤y,y≤z 必有 x≤z。

其它如全关系 E_A,空关系Æ,恒关系I_A均具有传递性。

3.传递关系的关系图的特点

如 R 是传递关系,如果结点 a 能通过有向弧组成

的有向路通向结点 x,(该有向路,包含两条或两条

以上的弧)则 a 必须有有向弧直接指向 x,否则 R

就不是传递的。

例:R={<a,b>,<b,c>,<c,d>,<a,c>}

a　　b　　c　　d

a 能通向 d,b 能通向 d,但<a,d>ÏR,<b,d>ÏR

∴R 不是传递的,必须补上<a,d>,<b,d>,R 才是传递的,

4.结论

R 是传递关系的充要条件是 R·RÍR

定理 10:设 R,S 是 A 上的传递关系,则 R^{-1},

RÇS 也是 A 上的传递关系

证明:"a,b,cÎA,如<a,b>ÎR^{-1},<b,c>ÎR^{-1}

则<c,b>ÎR,<b,a>ÎR,因 R 是传递的,

\<c,a>ÎR\<a,c>ÎR^{-1}

\ R^{-1}是传递的

说明:当 R,S 均是传递的,但 RÈS 未必是传递的

例 R={<a,b>},S={<b,c>},则 R,S 均是传递的,但 RÈS={<a,b>,<b,c>}

不是传递的