二、笛卡尔积：

定义 12：设 A，B 是任意两个集合，用 A 中元素作第一元素，B 中元素作第二元素，构成的有序对，所有这样有序对的全体组成的集合称集合 A，B 的笛卡尔积，记作 A×B。

即 $A\times B=\{<x,y>|x\in A,y\in B\}$。

例 2，设集合 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{0,1\}$,求 A×B，B×A，A×A，

（A×B）∩ B×A，

解：$A\times B=\{<a,0>,<a,1>,<b,0>,<b,1>,<c,0>,<c,1>\}$

$B\times A=\{<0,a>,<1,a>,<0,b>,<1,b>,<0,c>,<1,c>\}$

显然（A×B）∩ B×A=∅

$A\times A=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>,<b,c>,<c,a>,<c,b>,<c,c>\}$

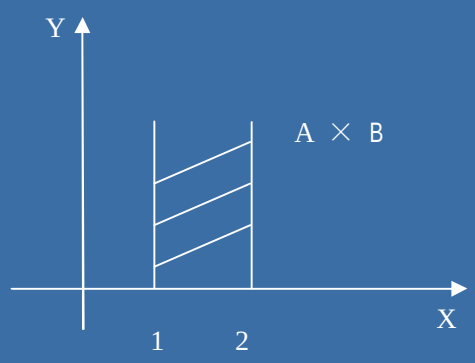
说明:<1> 如 A，B 均是有限集，$|A|=m$,$|B|=n$，则必有 $|A\times B|=mn$

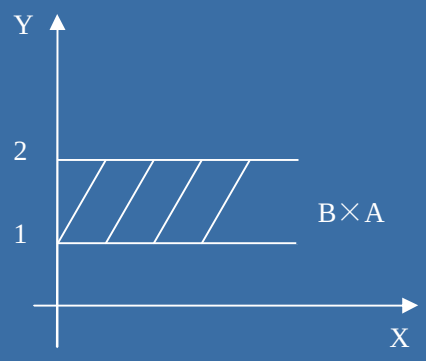
<2> 一般说 A×B 与 B×A 不相等，即集合的笛卡尔积运算，不成立交换律。

例 3：设 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 2,x\in R\}$ $B=\{y|y\geqslant 0,y\in R\}$

求 A×B，B×A

解：$A\times B=\{<x,y>|1\leqslant x\leqslant 2,\ y\geqslant 0,\ y\in R\}$ $B\times A=\{<x,y>|x\geqslant 0,\ 1\leqslant y\leqslant 2,x,\ y\in R\}$





A×B,B×A 分别表示平面直角坐标系中的某一个区域（类的集合），

当 A=B 时 A×B 可以记作 A^2。

8:55

定义 13〈n 的笛卡尔积的定义〉A_1，A_2…，

A_n 是 n 个集合，

记 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{<x_1, \cdots, x_n> | x_i \in A_i, i=1, \cdots, n\}$

称为这 n 个集合的笛卡尔积。

而当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$ 时，记 $A \times A \times \cdots\cdots \times A = A^n$。

10:24

例 4：设 A={1，2}，B={a，b}，c={α}

求：（1）A×B×C，（2）（A×B）×C，（3）A×（B×C）

解：<1>A×B×C={<x,y,z>|x∈A,y∈B,z∈c}={<1,a,α>,<1,b,α>,<2,a,α>,<2,b,α>}

<2>(A×B) × C 是两个集合（A×B）和 C 的笛卡尔积，其中一个集合 A×B，又是两个集合的笛卡尔积。

12:30

（A×B）× C ={<<1,a>,α>,<<1,b>,α>,<<2,a>,α>,<<2,b>,α>}

<3>A × (B × C)={<x,<y,z>>|x∈A,y∈B,z∈c}

14:10

说明:如（B × A）^{2}，它是两个集合 B×A 和 B×A 的笛卡尔儿积，而这两个集合本身是两集合的笛卡尔积。故（B×A）^{2}=（B×A）×（B×A）={<<x,y>,<z,w>>|x∈B,y∈A,z∈B,w∈A}

例 6：设集合 A={1，2}求 P（A）×A

解：P（A）={∅,{1},{2},{1,2}}

P(A) ×A ={<∅,1>,<∅,2>,<{1},1>,<{1},2>,<{2},1>,<{2},2>, <{1,2},1>,<{1,2},2>

共 8 个元素。

三、笛尔儿积的性质：

性质 1：对于任意集合 A，A×∅=∅，∅×A=∅

性质 2：笛卡尔积运算不满足交换律，当 A≠∅，B≠∅，A≠B 时 A×B=B×A

性质 3：笛卡儿运算不满足结合律，即当 A，B，C 均非空时（A×B）×C≠A×（B×C）

因（A×B）×C ={<<a,b>,c>|a∈A,b∈B,c∈C}

A×(B×C)={<a,<b,c>>|a∈A,b∈B,c∈C}

例 7：设 A，B，C，D 是任意集合，判断下列命题是否正确？

（1） A×B=A×C⇒ B=C

不正确，当 A=∅，B≠C 时，A×B=A×C=∅

（2）$A-(B\times C)=(A-B)\times(A-C)$

不正确，当 $A=B=\{1\}$，$C=\{2\}$时，$B\times C=\{1\}-\{<1,2>\}=\{1\}$

而 $(A-B)\times(A-C)=\varnothing\times\{1\}=\varnothing$

（3） $A=B$，$C=D\Rightarrow A\times B=C\times D$

正确，由定义可以证明，在非空前提下是充要条件

（4） 存在集合 A 使得 $A\subseteq A\times A$ 正确，当 $A=\varnothing$时，$A\subseteq A\times A$

定理 4：对任意三个集合 A，B，C 有

（1） $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

（2） $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

（3） $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

（4） $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

证明：（2）$\forall<a,b>\in A\times(B\cap C)$ 则 $a\in A,b\in B\cap C$

即 $a\in A,b\in B$,且 $b\in c$,即$<a,b>\in A\times B$ 且$<a,b>\in A\times C$

$\therefore<a,b>\in(A\times B)\cap(A\times C)$ $\therefore A\times(B\cap C)\subseteq(A\times B)\cap(A\times C)$

$\forall<a,b>\in(A\times B)\cap(A\times C)$ 则$<a,b>\in A\times B$ 且$<a,b>\in A\times C$

则 $a\in A,b\in B$,且 $a\in A,b\in C$,则 $b\in B\cap C$

$\therefore<a,b>\in A\times(B\cap C)$

$\therefore(A\times B)\cap(A\times C)\subseteq A\times(B\cap C)$

由上两条$\therefore A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

定理 5，对于任意集合 A，B，C，若 $C\neq\varnothing$，则

（1） $A\subseteq B$ 的充要条件是 $A\times C\subseteq B\times C$

（2） $A\subseteq B$ 的充要条件是 $C\times A\subseteq C\times B$

证明：充分性：$\forall x\in A$，因 $c\neq\varnothing$，任取 $y\in c$

$\therefore<x,y>\in A\times C$,因 $A\times C\subseteq B\times C$

$\therefore<x,y>\in B\times C$ $\therefore x\in B$，$\therefore A\subseteq B$

必要性：$\forall<x,y>\in A\times C$ 则 $x\in A,y\in C$

又$\because A\subseteq B,\therefore x\in B$，$\therefore<x,y>\in B\times C$ $\therefore A\times C\subseteq B\times C$

注意（1）在例 7 中 $A\times B=A\times C\Rightarrow B=C$ 命题不正确，举反例时举 $A=\varnothing$，而如 $A\neq\varnothing$时由定理 5 可知该命题是正确的，且是充要条件。

(2)在证明过程中 $C\neq\varnothing$的条件仅在充分性要用，必要性可不用因而 $A\subseteq B\Rightarrow A\times C\subseteq B\times C$，不必用

$C\neq\varnothing$的条件

定理 6：对任意四个非空集合则 $A\times B\subseteq C\times D$ 的充分必要条件是 $A\subseteq C$，$B\subseteq D$

证明：充分性由定理 5，因 $B\subseteq D$，$A\neq\varnothing$。$\therefore A\times B\subseteq A\times D$。又 $A\subseteq C$，D 非空。$\therefore A\times D\subseteq C\times D$，$\therefore A\times B\subseteq C\times D$

必要性$\forall x\in A$，$y\in B$.$\therefore <x,y>\in A\times B$，又$\because A\times B\subseteq C\times D$.$\therefore <x,y>\in C\times D$，$\therefore x\in C, y\in D$.$\therefore A\subseteq C, B\subseteq D$

第四章　　二元关系和函数

关系：人与人的关系有朋友关系，上下级关系，父子关系，同学关系.两数之间有大于，小于，等于关系，有整除，同余关系。两个变量有函数关系等。关系描述客体之间相互联系。

§4.1 关系的概念

一、关系的基本概念：

1、 关系的定义：

定义 1：任意一个有序对集合称为一个二元关系，简称关系。记作 R，如果$<a,b>\in R$，可记作

aRb，称 a 与 b 有关系 R，如$<a,b>\notin R$，记作 $\overline{aRb}$，称 a 与 b 没有关系 R。这种记法称为中缀记法。

例：$R=\{<a,1>,<b,1>,<b,2>\}$则 aR1，aR2，

例：$R=\{<x,y>|x,y\in N$ 且 $x>y\}$这是自然数集合上的一个“大于”关系，显然$<3,2>\in R$，即 3R2。如我们把 R 读作“大于”，则 3R2 读作“3 大于 2”。

说明：（1）我们把关系 R 这种无形的联系同集合这种“有形”的实体来描述，在今后的描述和论证带来方便。

（2） 有序对是讲究次序的，如$<a,b>\in R$ 未必有$<b,a>\in R$，即 a 与 b 有关系 R，未必 b 与 a 有关系 R。

例：甲与乙有父子关系，则乙与甲肯定没有父子关系了。

定义 2：$A\times B$ 的任何一个子集所定义的一个二元关系 R，称从 A 到 B 的二元关系，为 A=B 时，我们称之为 A 上的二元关系。

例：$A=\{a,b,c\}$　$B=\{1,2,3\}$

$R_1=\{<a,1>,<b,2>,<a,3>\}$是 A 到 B 的一个关系

$R_2=\{<1,1>,<2,3>,<1,3>$是 B 上的一个关系

定义 3：关系 R 中所有有序对的第一元素的集合称为关系 R 的定义域，记作 Dom（R）第二元素的集合称为关系 R 的值域，记作 Ren（R）。

如果 R 是 A 到 B 的关系，则 Dom（R）$\subseteq$A，Ran（R）$\subseteq$B