§3.2 集合的运算及其性质

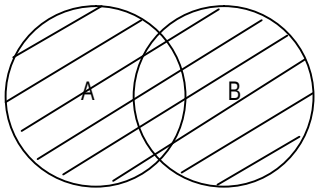
一、集合的运算：

（一）　并集：

定义 7：设 A，B 是两个集合，所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$;

$A\cup B=\{x|x\in A \vee x\in B\}$。

用文氏图表示如下：



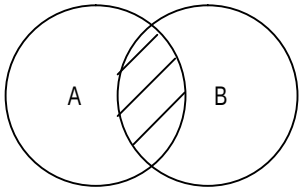
图中阴影部分表示 $A\cup B$　　2：46

（二）　交集：

定义 7：A，B 是两个集合，即属于 A，又属于 B，称为集合 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$。即

$A\cap B=\{x|x\in A \wedge x\in B\}$

用文氏图表示如下：



图中阴影部分表示 $A\cap B$　　3：42

显然有：

(1)$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$

(2)$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$。

(3)$A\cap B\subseteq A\cup B$

(4)若 $A\subseteq B$ 则 $A\cap B=A$，$A\cup B=B$。　　4:56

例 2：集合 $A=\{x|-2<x<2，x\in R\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 4,x\in R\}$

求 $A\cup B$，$A\cap B$ 。

解：

$A\cup B=\{x|-2<x<2$ 或 $0\leqslant x\leqslant 4,x\in R\}$

$=\{x|-2<x\leqslant 4,x\in R\}$

$A\cap B=\{x|-2<x<2$ 且 $0\leqslant x\leqslant 4,x\in R\}$

$=\{x|0\leqslant x<2,x\in R\}$　　6:23

例 3：设 A 为奇数集合，B 为偶数集合，求 $A\cup B$ 和 $A\cap B$ 。

解：$A\cup B=\{x|x$ 是偶数或 x 是奇数$\}=Z$

$A\cap B=\{x|x$ 既是偶数又是奇数$\}=\varnothing$

例 4：设 $A_1=\{1，\{2，3\}\}$，$A_2=\{2，\{1，3\}\}$，$A_3=\{3，\{1，2\}\}$，

求 $A_1\cap A_2$，$A_1\cap A_3$，A_2，A_3。

解：三个集合均有两个元素，其中一个元素是数。另一元素是两个数组成的集合，三个集合没有相同元素，$\therefore A_1\cap A_2=A_2\cap A_3=A_3\cap A_1=\varnothing$

<u>不相交</u>：如 $A\cap B=\varnothing$ 称 A，B 不相交。　　9：49

例 5：对任意集合 A，B，求证 P（A）∪P（B）⊆P（A∪B）

证明：$\forall u, u\in P(A)\cup P(B)\Rightarrow u\in P(A)\vee u\in P(B)$

如 $u\in P(A)\Rightarrow u\subseteq A$，因 $A\subseteq A\cup B$，$\Rightarrow u\subseteq A\cup B\Rightarrow u\in P(A\cup B)$

类似如 $u\in P(B)\Rightarrow$ <u>$u\in P(A\cup B)$</u>

$\therefore P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$

思考：$P(A\cup B)\subseteq P(A)\cup(B)$ 成立吗?

即以上证明过程每一步能推回去吗?

解答：$u\subseteq A\cup B$ 推不出 $u\subseteq A$ 或 $u\subseteq B$。

例：$A=\{1，2\}$，$B=\{3，4\}$，$A\cup B=\{1，2，3，4\}$，$u=\{2,3\}$，$u\subseteq A\cup B$ 成立，但 $u\subseteq A$ 且 $u\subseteq B$。

16：26

关于 n 个集合的交，并集

$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 记作 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$

$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 记作 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$　　17:37

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k=\{x \mid \exists k，1\leqslant k\leqslant n，x\in A_k\}$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k=\{x \mid \forall k，1\leqslant k\leqslant n，x\in A_k\}$$

还可以推广到无穷多个，甚至是不可列个集合的交和并。　19:16

（三）　差集，补集：

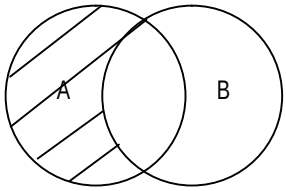
定义 8：设 A，B 是两集合，属于 A 而不属于 B 的元素全体称为 A 与 B 的差集，记作 A-B，

即 $A-B=\{x \mid x\in A\wedge x\overline{\in} B\}$。

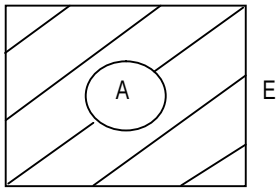
设 E 为全集，E 中不属于 A 的元素的全体称为 A 的补集,记为~A,即~A=E-A，

$\sim A=\{x \mid x\overline{\in} A$ 且 $x\in E\}$。

用文氏图表示如下：



A-B



~A　　22：34

例 6：求证 $A-B=A\cap\sim B$

证明

$A-B=\{x \mid x\in A\wedge x\overline{\in} B\}=\{x \mid x\in A\wedge\in\sim B\}=A\cap\sim B$

当 A，B 不相交时，A-B=A，B-A=B　　24：49

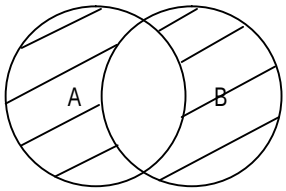
（四）　对称差：

定义 9：设 A，B 是两集合，集合（A-B）∪（B-A）称为集合 A，B 的对称差，记作 A⊕B。

即 $A\oplus B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\overline{\in} B\vee x\in B$ 且 $x\overline{\in} A\}$

A⊕B=（A∪B）-（A∩B）

文氏图表示如下：



将 A∪B 中同时属于 A，B 的元素去掉

A⊕B

$\oplus$与逻辑中的“异或”相类似。　　27：52

例 7：$A=\{a,b,e\}$　$B=\{a,c,d\}$

解：$B-A=\{c,d\}$　$A-B=\{b,e\}$　$A\oplus B=\{c,d,b,e\}$

例 9：$A=\{x|x<-2,x\in R\}E=\{x|x\leqslant 2\}$求$\sim A$，$A\oplus A$。

解：$\sim A=\{x|x\leqslant 2\wedge\neg x<-2\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2，x\in R\}$

$A—A=\varnothing$

$\therefore A\oplus A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$　　30：48

例：假定 $A\oplus B=A\oplus C$ 则有 $B=C$

证明:（1）$\forall x\in B$ 如证出 $x\in c$，则 $B\subseteq C$ 成立

分两种情况：

（a）　若 $x\in A\Rightarrow x\in A\cap B$

$\Rightarrow x\overline{\in} A\oplus B$(对称差定义)

$\Rightarrow x\overline{\in} A\oplus C$（因 $A\oplus B = A\oplus C$）

$\Rightarrow x\in\sim(A\cup C)$或 $x\in A\cap C$

$\Rightarrow x\in A\cap C$(由 $x\in A$ 故 $x\overline{\in}\sim(A\cup C)$)

$\Rightarrow x\in C$

(b) $x\overline{\in} A$

$\Rightarrow x\overline{\in} A\cap B$

$\Rightarrow x\in A\oplus B$ 或 $x\in\sim(A\cup B)$

$\Rightarrow x\in A\oplus B$(因 $x\in B$,故 $x\overline{\in}\sim(A\cup B)$)

$\Rightarrow x\in A\oplus C$(因 $A\oplus B=A\oplus C$)

$\Rightarrow x\in A-C$ 或 $x\in C-A$

$\Rightarrow x\in C-A$(因 $x\overline{\in} A$，$\therefore x\in A-C$)

$\Rightarrow x\in C$

$\therefore B\subseteq C$

(2)$\forall x\in C$,类似可证 $x\in B$,

$\therefore C\subseteq B$

$\therefore B=C$　　36：20

二、集合运算性质（运算律）

1、 交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。

2、 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$。

$(A\cap B)\cap C=A(B\cap C)$

3、 分配律

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

4、 幂等律 $A\cup A=A$，$A\cap A=A$

5、 同一律 $A\cup\varnothing=A$，$A\cap E=A$

6、 零一律 $A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup E=E$

7、 补余律 $A\cap\sim A=\varnothing$，$A\cup\sim A=E$

8、 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$　$A\cap(A\cup B)=A$

9、 德摩根律 $\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$

$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

10、双重否定律 $\sim(\sim A)=A$

注：$A-B=A\cap\sim B$　　39：50

用集合相等的定义来证明这些律

证明分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

（1）$\underline{\forall x\in A\cup(B\cap C)}$，分两种情况

（a） 如 $x\in A\Rightarrow x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$

$\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(b) 如 $x\overline{\in}A$，则 $x\in B\cap C\Rightarrow x\in B$ 且 $x\in C$

$\Rightarrow x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$

$\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$\therefore$任何情况下均有 $\underline{x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}$

$\therefore A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(2) $\forall x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\Rightarrow x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$

下分两种情况

（a） 若 $x\in A$，则 $x\in A\cup(B\cap C)$

（b） 若 $x\overline{\in}A$，

由 $x\overline{\in}A, x\in A\cup B\Rightarrow x\in B$,

由 $x\overline{\in}A, x\in A\cup C\Rightarrow x\in C$

$\Rightarrow x\in B\cap C\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$

任何情况均有 $x\in A\cup(B\cap C)$

$\therefore (A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$

(1)(2)合并为 $A\cup（B\cap C）=（A\cup B）\cap（A\cap C）$ 44：18

证明一个德摩根律：$\sim（A\cup B）=\sim A\cap\sim B$

（1）$\forall x\in\sim(A\cup B)\Rightarrow x\overline{\in}A\cup B$

$\Rightarrow x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}B\Rightarrow x\in\sim A$ 且 $x\in\sim B$

$\Rightarrow x\in\sim A\cap\sim B$ $\therefore\sim(A\cup B)\subseteq\sim A\cap\sim B$

(2)$\forall x\in\sim A\cap\sim B\Rightarrow x\in\sim A$ 且 $x\in\sim B$

$\Rightarrow x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}B\Rightarrow x\overline{\in}A\cup B$

$\Rightarrow x\in\sim(A\cup B)$

$\therefore\sim A\cap\sim B\subseteq\sim(A\cup B)$

由（1）（2）得$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$ 46：43

例 12：证明吸收律 $A\cap（A\cup B）=A$

证明：$A\cap（A\cup B）$

$=（A\cup\varnothing）\cap（A\cup B）$（同一律）

$=A\cup（\varnothing\cap B）$（分配律）

$=A\cup\varnothing$ （零一律）

$=A$ （同一律） 47：31

例 13：求证 $A-（B\cup C）=（A-B）\cap（A-C）$

证明：左边$=A\cap\sim（B\cup C）$

$=A\cap（\sim B\cap\sim C）$（德摩根律）

$=A\cap\sim B\cap A\cap\sim C$（幂等律、交换律）

$=（A—B）\cap（A—C）$ 49：38（50：38）