二、关键路径问题：

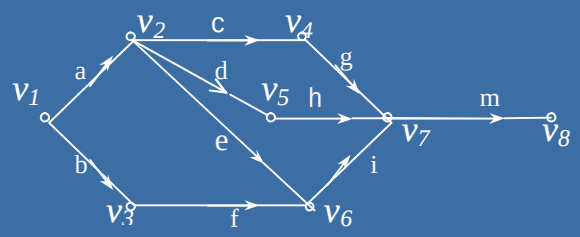
在实际中我们可以用一张有向图(网络图)来表示一项工程，组成该工程的各道工序，及工序之间的相互关系。

例如，某项工程由 a,b,c，…，l，m 10 道工序组成，工序的顺序及相互关系是：

a,b 可以同时开工，a 完成后，c,d,e 才可以同时开工，

b 完成后，f 才可以开工，c 完成后，g 才可以开工，d 完成后，h 可以开工，

e，f 完成后，l 可以开工，g，h，l 完工后，m 可以开工。



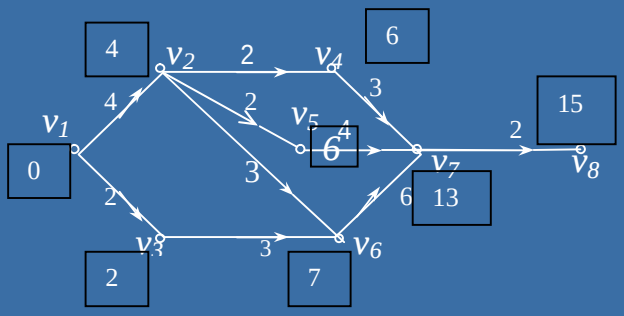
用有向边→表示工序，边上权表示完成工序的时间，而结点 v_i 表示某个事项，表示某些工序的完工，同时表示某些工序可以开工。习惯上所有的有向边均从左向右。

其中有一个点，其入度为零，称为发点(整个工程的开始)，还有一个结点的出度为零，称为收点(整个工程的结束)，这样的带权有向图〈V,E,W〉，称为计划评审技术图。

求关键路就是求出发点到收点的一条最长路径。

1．事项的最早完工时间，$TE(v_i)$

<u>定义 19</u>：自发点 v_0 开始沿权和最长路径到达 v_i 所需的时间称为该点 v_i 的最早完工时间，记作 $TE(v_i)$，$TE(v_i)$在前面所有工序均没有耽误的情况下，该事项最早可能完成时间，此时前面的工序均必须完成。



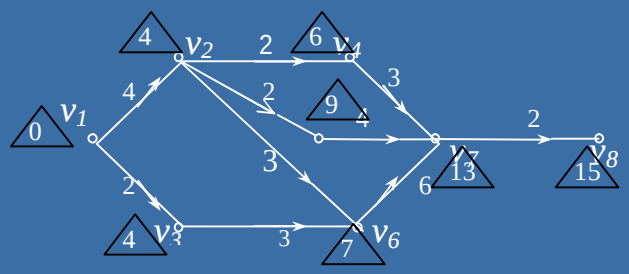
记 $\Gamma^-_D(v_i) = \{v \mid v \in V，且(v，v_i) \in E\}$，称为 v_i 的前先驱集，$TE(v_i)$的算法：$TE(v_i) = \max\{TE(v_j)+\omega_{ji}，v_j \in \Gamma^-_D(v_i)\}$

这样从始点出发，$TE(v_0)=0$，一直计算到收点 v_n，$TE(v_n)$就是工程的最早完工时间。

2．事项的最迟(必须)完成时间　TL(v_i)

<u>定义 20</u>：在保证收点 v_n 的最早完成时间不增加的条件下，该事项 v_i 最晚必须完成的时间，称为该点 v_i 最晚完成时间，记为 TL(v_i)。

因为有些工序不在关键路上,这些工序有个缓冲时间,稍迟一些时间动工，不会导致整个工程的完工时间，但这也有个限度，TL(v_i)就是不耽误整个工程的最早完工条件下，该工序最迟的开工时间，过了这时间开工将影响整个工程。



在关键路上，TE(v_i)=TL(v_i)

其算法是从收点开始向后计算：

TL(v_i)= min{TL(v_j)-ω_{ij}，$v_j \in \Gamma_D^+(v_i)$}

Γ_D^+（v_i）={v|v∈V，<v_i，v>∈E}，称为 v 的后继元集。

因 v_0 和 v_n 均在关键路上,∴TE（v_n）=TL（v_n），TE（v_0）=TL（v_0）= 0

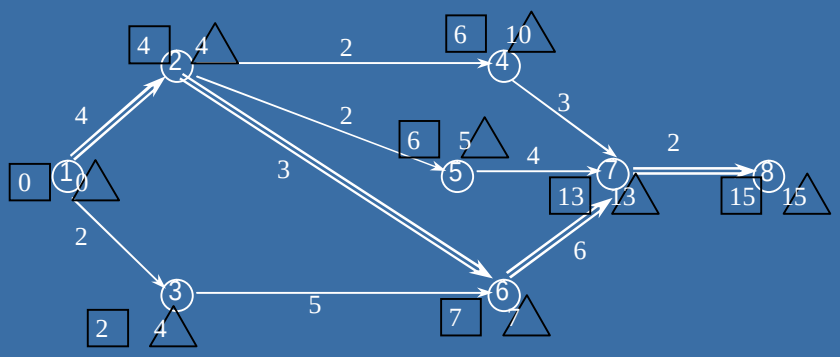
3．缓冲时间

<u>定义 21</u>：称 TS(v_i)=TL(v_i)- TE(v_i)为结点 v_i 的缓冲时间。

缓冲时间，就是该事项在不影响整个工程的前提下，可以延滞时间的限制，在关键路上 TS（v_i）=0，即关键路上该事项的任何延滞必导致整个工程的延滞。

4．关键路：从发点 v_0 出发到收点 v_n 必存在关键路径，在这条关键路上，任何工序的延滞必导致整个工程的延滞。

关键路是整个工程计划的主要矛盾。关键路至少一条，也能是不止一条。



节点	1	2	3	4	5	6	7	8
TE(v_i)	0	4	2	6	6	7	13	15
TL(v_i)	0	4	4	10	9	7	13	15
TS(v_i)	0	0	2	4	3	0	0	0

其关键路径是 V_1, V_2, V_5, V_7, V_8

关键工序是 a,e,l,m

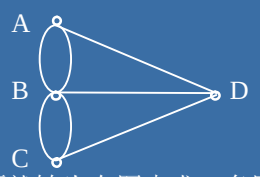
第六章　几种特殊的图

§1.欧拉图和中国邮路问题

一、欧拉图：

1、　哥比斯堡问题：

把城市的每一部分用点表示，而每座桥用边表示，该市成为一个七条边的图，



七桥问题就转为在图中求一条回路，此回路经过每条边一次且仅有一次。

2、　欧拉图：

<u>定义 1</u>：在无向连通图中，经过图中每条边一次且仅有一次并且经过每个结点的一条通路（回路），称为<u>欧拉通路（欧拉回路）</u>存在欧拉回路的图称为欧拉图。

一笔画问题：笔不离开纸，每边只能画一次，不允许重复，将图画出，称该图能一笔画。

（1）　如终点回到起点，则等价于该图存在欧拉回路

（2）　如终点不是起点，则等价于该图仅存在欧拉通路

（3）　如该图不能一笔画，则等价于该图不存在欧拉通路和欧拉回路。

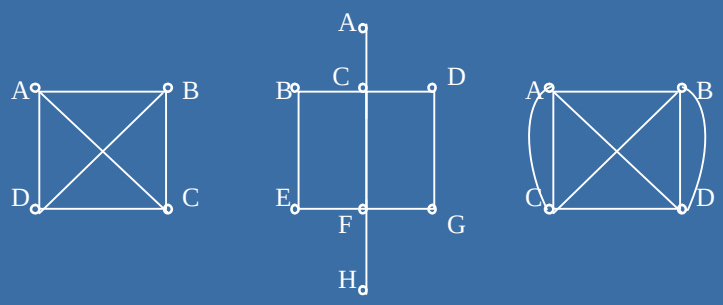


图 a 不是一笔画，它不是欧拉图，也不存在欧拉通路；

图 b 能起终点不同的一笔画，存在欧拉通路 ACFEBCDGFH，但不存在欧拉回路，不是欧拉图；

图 c 能起终点相同的的一笔画，存在欧拉回路，它是欧拉图。

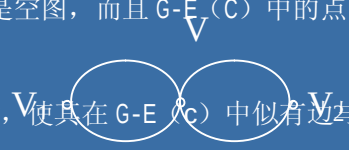
3、 欧拉图的充要条件：

<u>定理 1</u>：无向连通图 G 是欧拉图的充分必要条件是 G 不含奇数度结点。

（换言之：G 是 Euler 图⇔连通且每个点度数均为偶数）

证明：<u>必要性</u> 设 G 是 Euler 图，则必存在一条包含每条边的回路，而且每边恰一次。经过某点时，必沿一条边进，另一条边出，故每个结点相关联的边是偶数，故每个结点均为偶数度，且该 Euler 回路经过每个点，故 G 是连通的。

<u>充分性</u>：设 G 的每点均是偶数度且连通，设 C 是一条包含 G 中边数最多的一个回路，且边是不重复的，若 C 包含了 G 中的所有边，则 C 就是 Euler 回路，G 是 Euler 图。如果 C 不包括 G 中的所有边，则删边子集 G-E（C）不是空图，而且 G-E（C）中的点的度数仍均为偶数。



因 G 是连通图则 C 中必存在一个点 v，使其在 G-E（c）中似有边与 v 相关联，因 G-E（c）均为偶数度，则过 v 必在 G-E（c）中存在一个回路 c′，将 c 和 c′ 两个回路合起来，又构成一个新的回路 C∪C′：

$v \to v_1 \to v \to v_2 \to v$ 边数必比 C 的边数多，与假设矛盾。故 G 是 Euler 图。

作业

P170 练习 5.2(A)：1（2），2，3，4

5.2(B)：1，2，4，5

P177 练习 5.3(A)：1，2，3

5.3(B)：1，2

P181 练习 5.4(A)：1，3

5.4(B)：1，2，3，4

P187 习题五：5，6，8，9