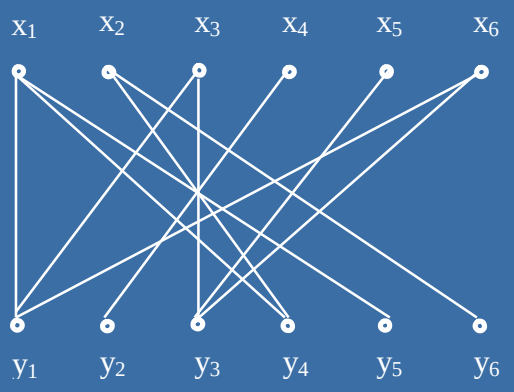
例 5： 现有 6 个工人{ x_1,x_2，…，x_6}，现有 6 项工作
{ y_1,y_2，…，y_6 }假设在同一时间内，每人只能干一项
工作，每项工作只需一人干，每个人能干的工作用边表
示如图。
（？图）

安排工作就是求二分图的一个匹配问题。求最大匹配
就是一个工作最佳的安排问题，使的尽可能多的人有工作
干。

而完备匹配就是每个工人均有活干,(工人数<=工作项数)或每
个工作均有人干(工人数>=工作项数),而完备匹配是以上两者皆有
（图）
该问题存在最大匹配
(x_1，y_4),(x_2，y_6),(x_3,y_1),(x_4,y_2),(x_5，y_3)而 x_6 没事干，
y_5 没人干该问题不存在一个完美匹配，从图中可以看出 y_6
只能由 x_2 干，y_5 只能由 x_1 干，选择由于 y_4 只能由 x_1,x_2 干，
因此 y_4 就没人干了。



定理 24:(霍尔定理)在二分图 G=<V_1,V_2,E>中
存在一个从 V_1 则 V_2 的完备匹配的充要条件是从 V_1

中任意取 k 个结点至少与 V_2 中的 k 个结点邻接.
k=1，2，…，$|V_1|$，$|V_1|\leqslant|V_2|$。此定理中的条件
称为相异性条件。
刚才例子中，$\{y_4,y_5,y_6\}$相邻接的集合为$\{X_2,X_4\}$。
不满足霍尔定理的相异性条件因而不存在完备匹配。
定理 25：设 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$为一个二分图，若存在一
个正整数 t，且满足条件。
1、V_1 中每个结点至少关联 t 条边。
2、V_2 中每个结点至多关联 t 条边。则 G 中存在一
个从 V_1 到 V_2 的一个完备匹配。
该条件称为 t 条件。

第七章　群

§7.1 代数结构概述

一、代数运算及其性质：
1.代数运算的定义：
定义 1:设 A 是个非空集合，A×A 到 A 的一个映射 f
f：A×A→A 称为 A 上的一个二元代数运算，简称二
元运算，A→A 的一个映射 f
f：A→A 称为 A 上的一个一元代数运算，简称一元
运算。
类似可定义 n 元运算：通常用。，*，•，+，×
来表示二元运算，称为算符
例如：f 是 A 上的二元运算，即 A×A→A 的映射。

"x,y∈A，$f(\langle x,y\rangle)=Z\in A$，用算符表示，即 x*y=Z

注:映射有存在性和唯一性的要求,运算当然要此
要求

①存在性，"x,y∈A，x*y 要有结果，此结果∈A
②唯一性，"x,y∈A，x*y 只能有一个结果∈A
例 1: 在实数集上定义二元运算*，"x,y∈R，x*y=y
则 2*3=3，0.5×(-)=- ， 50*0=0，而 0*50=50

例：在 Z_+上定义运算，*，+，
"x,y∈Z_+
x*y=x,y 的最大公约数，x+y=x,y 的最小公倍数
6×8=2，6+8=24，12*15=3，12+15=60
例：在实数 R 上的除法运算，这不是一个代数运算，因 0 不能作除数，运算的存在性不满足。
例:在 R 上求平方根运算(作为一元运算)，它不是一个代数运算。
-9 不存在平方根，存在性不满足。
9 有两个平方根，3，-3，唯一性不满足。
但在 R^+上求平方根运算是一个一元运算。
例 2: （1）自然数集合上的乘法是 N 上的二元运算。
（2）整数集合 Z 上的加法、乘法、减法是 Z 上的二元运算，但除法不是 Z 上的运算，因 0 不能作分母，且相除结果不可以是整数，即在 Z 上没有结果。
（3）设 M_N（R）是 n 阶实矩阵的全体，因而矩阵乘法是 M_n（R）上的二元运算。
（4）集合的交，并，对称差是幂集上的二元运算，补是幂集上的一元运算。
（5）合取，析取，蕴含，等价、异或是命题公式集合上的二元运算，而否定是一元运算。

（6）求一个数的相反数分别是整数集合，实数集合，有理数集合上的一元运算。
（7）求一个数的倒数是非零有理数，非零实数集上的一元运算但其不是非零整数集上运算。
2.运算表：
在有限集上可以将结果一一列出来定义运算，简便明了的方法是画出运算表。
例 3：设 A ={1，2} ，P（A）={Φ，{1}，{2}，{1，2}}
在 P（A）上的运算⊕和~的运算表如下

⊕	Φ	{1}	{2}	{1，2}
Φ	Φ	{1}	{2}	{1，2}
{1}	{1}	Φ	{1，2}	{2}
{2}	{2}	{1，2}	Φ	{1}
{1,2}	{1，2}	{2}	{1}	Φ

a	~a
Φ	{1,2}
{1}	{2}
{2}	{1}
{1,2}	Φ

3.运算的封闭性
*是 A 上运算"x,y∈A，x*y∈A，称*对 A 是封闭的。
例:减法是 Z_+上的运算,Z_+的子集自然数 N。x,y∈N，可能 x-yÏN 称减法在 N 上不是封闭的。
例：除法是非零实数集上的二元运算但其子集非零整数集却不是封闭的。
例：矩阵乘法是 n 阶方阵集合 Mn(R)上的运算,Mn(R)的子集 Nn(R)=非奇异矩阵全体，矩阵乘法对 Nn（R）是封闭的。因两个非奇异矩阵的乘积仍是非奇异矩阵，但两个非奇异矩阵的加法未必是非奇异的。因而加法在 Nn（R）上不是封闭的。
封闭性主要是对子集而言，*是 A 上运算，BÌA，考虑*对 B 是否封闭。

4.运算律：

(1)交换律，设。是 A 上的二元运算，如果"x,y∈A，均有 x。y=y。x 称。
在 A 上是可交换的，或说。在 A 上成立交换律。
(2)结合律：

定义 3：设。是 A 上二元运算,如"x,y，z∈A，均有（x。y）。z=x。（y。z）称运算。在 A 上是可结合的，或称。在 A 成立结合律
例：实数中的加法乘法是可交换的，也是可结合的，但减法不是可交换的，也不是可结合的。矩阵的乘法成立结合律，但不成立结合律，集合的∩，∪，⊕均是可交换的，也是可结合的。
（3）幂等律："x∈A，x*x=x,称*在 A 上成立幂等律。
如果存在 x∈A，使 x*x=x，称 x 为*法的幂等元。

显然*在 A 中成立幂等元Û"x∈A，x 是幂等元。
例：集合的∩，∪，逻辑运算∧，∨成立幂等律。
实数中的加法，乘法不成立幂等律对+，0 是幂等元对乘法 1 是幂等元。
（4）分配律：设。和*是 A 上的两个二元运算，如对"x,y，z 均有
x*（y。z）=（x*y）。（x*z）

或（y。z）*x=（y*x）。（z*x）
则称*对。在 A 上成立分配律。
例实数乘对加成立分配律，但加对乘不成立分配律。
（5）吸收律：
"x,yÎA,x*（x。y）=x，x。（x*y）=x
称。和*满足吸收律。

5．单位元：

定义 7：设。是 A 上的二元运算，如果存在元素 e_L（或 e_r）ÎA，使得对一切 xÎA，均有 e_L。x=x（或 x。e_r =x）

则称 e_L（e_r）是 A 中关于运算。的一个左单位元（右单位元）若元素 e 既是左单位元，又是右单位元，则称 e 是 A 中关于运算。的一个单位元，也称幺元。

例：实数集上加法运算，0 是单位元；乘法运算则 1 是单位元，Mn（R）上的矩阵加法运算，零矩阵是单位元；而乘法运算单位矩阵是单位元。

对于幂集 P(A)上的Ç运算Æ是单位元，而È运算则 A 是单位元。

例：实数集 R 上定义运算"a,bÎR，a*b=a，则不存在左单位元，使得"bÎR，e_L*b=b，而对一切 aÎR，"bÎR，

b*a=b，\a 是右单位元

即 R 中任意数均是右单位元，故 R 中不存在单位元。

定理 1：设*是集合 A 上的二元运算，e_L，e_r 分别是运算*的左单位元和右单位元，则有 e_L=e_r=e，且 e 是 A 上唯一的单位元

证明：∵e_L 是左单位元，则 e_L*e_r=e_r ∵e_r 是右单位元，则 e_L*e_r=e_L

∴e_L=e_r 且记为 e，则 e 是单位元

如 e¢也是 A 上关于*的单位元，则

e¢=e¢*e=e∴单位元是唯一的

6．逆元：

定义 8：设*是集合 A 上的二元运算，eÎA 是运算*的单位元，对于"xÎA，如果存在一个元素 yÎA，使得 x*y=e，y*x=e，则称 y 是 x 的逆元，记

$y=x^{-1}$，如果 x 的逆元存在，则称 x 是可逆的。

例：Z 上的加法运算，则逆元就是相反数，而对 N 上的加法运算，只有 0 存在逆元是 0，

例：设 A 是集合，S 是 A 的映射全体，单位元是恒等映射IA，而只有双映射才是可逆的。
例：Mn（R）上矩阵乘法，单位元是单位矩阵I，而逆元就是逆矩阵，当 A 是非奇异矩阵时，才可逆。

作业

P216 练习 6.4 (A) 1, 2, 3

(B) 1, 3, 4, 5, 6

P220 练习 6.5 (A) 1, 3, 4

P228 习题六 12, 14, 15, 16, 18