（2）复合运算成立结合律：

<u>定理 3</u>：设 R，S，T 分别是 A 到 B，B 到 C，C 到 D 的关系

则 $(R\cdot S)\cdot T = R\cdot(S\cdot T)$

证明： $\forall\langle x,w\rangle\in(R\cdot S)\cdot T$

$\Rightarrow\exists z\in C$，$\langle x,z\rangle\in R\cdot S$，$\langle z,w\rangle\in T$，

$\Rightarrow y\in B$，$\langle x,y\rangle\in R$，$\langle y,z\rangle\in S$，$\langle z,w\rangle\in T$，

$\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R$，$\langle y,w\rangle\in S\cdot T$

$\Rightarrow\langle x,w\rangle\in R\cdot(S\cdot T)$，

$\therefore\ (R\cdot S)\cdot T\subseteq R\cdot(S\cdot T)$

类似可以证 $R\cdot(S\cdot T)\subseteq(R\cdot S)\cdot T$

从 而 $(R\cdot S)\cdot T = R\cdot(S\cdot T)$ 4:52

4、关系的 n 次幂

<u>定义 9</u>：设 R 是 A 上的二元关系，$n\in N$,则关系的 n 次幂 R^n

定义为：(1)$R^0=I_A$是 A 上的恒等关系；

（2）$R^{n+1}=R^n\cdot R$

说明：如果 R 是 A 到 B 的关系，且 $A\neq B$，则 R^2是无意义的，

因为 $R\cdot R$ 是无法复合的。7:02

<u>定理 4</u>：设 R 是集合 A 上的关系，$m,n\in N$，则

（1）$R^m\cdot R^n=R^{m+n}$ (称第一指数律)

（2）$(R^m)^n=R^{mn}$ (称第二指数律)

此定理证明可以用数学归纳法加以证明。

说明：第三指数律是不成立的。一般是不成立的。

$(R\cdot S)^n=R^n\cdot S^n$

例：$(R\cdot S)^2=(R\cdot S)\cdot(R\cdot S) = R\cdot(S\cdot R)\cdot S$，

$R^2 \cdot S^2 = R \cdot R \cdot S \cdot S = R \cdot (R \cdot S) \cdot S$。

只要交换律不成立,第三指数律不成立　9:45

例 6：设 A={1,2,3,4,5}，A 上关系 R 为，

R={<1,2>，<2,1>，<2,3>，<3,4>，<4,5>}，则：

$R^0 = I_A$ ={<1,1>，<2,2>，<3,3>，<4,4>，<5,5>}

$R^1 = R$

R^2={<1,1>，<2,2>，<1,3>，<2,4>，<3,5>}

$R^3 = R^2 \cdot R$={<1,2>，<2,1>，<1,4>，<2,3>，<2,5>}

$R^4 = R^2 \cdot R^2$={<1,1>，<2,2>，<1,5>，<2,4>，<1,3>}

$R^5 = R^4 \cdot R^1$={<1,2>，<1,4>，<2,1>，<2,3>，<2,5>}　13:54

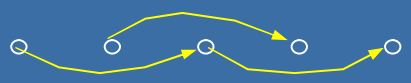
从关系图来看关系的 n 次幂

R：

1　2　3　4　5

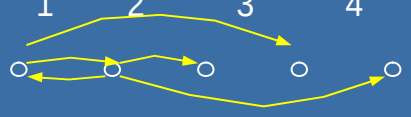
R^2就是所有在 R 中某点通过二条弧引近的点则在 R^2这两点间直接有条弧。

R^2：



1　2　3　4　5

R^3：



1　2　3　4　5

R^4：

1　2　3　4　5　18：00

三、逆关系

<u>定义 10</u>：设 R 是集合 A 到 B 的二元关系，则定义一个 B 到 A 的二元关系

$R^{-1}=\{<b,a>|\ <a,b>\in R\}$，称为 R 的　　关系，记作 R^{-1}

说明：

（1）R^{-1}就是将所有 R 中的有序对中的两个元素交换次序成为 R^{-1}，故 $|R|=|R^{-1}|$

（2）R^{-1} 的关系矩阵是 R 的关系矩阵的转置，即 $M_{R^{-1}}=M_R$

（3）R^{-1}的关系 T 图就是将 R 的关系图中的弧改变方向即可以。20：19

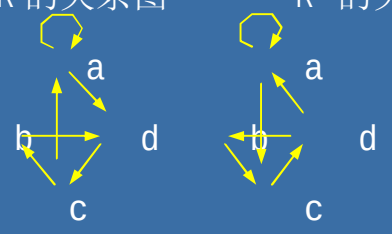
例 7：设某合 A={a,b,c,d}，A 的关系为

R={<a,a>，<a,d>，<b,d>，<c,a>，<c,b>，<d,c>}

则 R^{-1}={<a,a>，<d,a>，<d,b>，<a,c>，<b,c>，<c,d>}

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&1\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\qquad M_{R^{-1}}=M_R^T=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$

R 的关系图　　R^{-1}的关系图



23:12

<u>定理 5</u>：设 R 和 S 均是 A 到 B 的关系，则

（1）$(R^{-1})^{-1}=R$，

（2）$(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$，

（3）$(R\cap S)^{-1}= R^{-1}\cap S^{-1}$，

（4）$(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}$，

（5）$(R)^{-1}=-R^{-1}$，$(A\times B)^{-1}=B\times A$

（6）$\Phi^{-1}=\Phi$，

（7）$R=S<=>R^{-1}=S^{-1}$。

证明：（1）$\forall<a,b>\in(R\cap S)^{-1}$，则$<b,a>\in R\cap S$，

$<b,a>\in R$ 且 $<b,a>\in S$， 则$<a,b>\in R^{-1}$ 且$<a,b>\in S^{-1}$

则$<a,b>\in R^{-1}\in\cap S^{-1}$ $\therefore(R\cap S)^{-1}\subseteq R^{-1}\cap S^{-1}$，

以上推导过程均为可逆。 $\therefore R^{-1}\cap S^{-1}\subseteq(R\cap S)^{-1}$，

$\therefore(R\cap S)^{-1}\leqslant R^{-1}\cap S^{-1}$。

（4）若（3）、（5）成立，则

$(R-S)^{-1}=(R\cap\sim S)^{-1}=R^{-1}\cap(\sim S)^{-1}$。

$=R^{-1}\cap\sim S^{-1}=R^{-1}\sim S^{-1}$。27：43

<u>定理 6</u>：设 R 是 A 到 B 的关系，S 是 B 到 C 的关系，则

$(R\cdot S)^{-1}=S^{-1}\cdot R^{-1}$。

注意：复合关系的逆等于它们逆关系的反复合。

而 $(R\cdot S)^{-1}\neq R^{-1}\cdot S^{-1}$ 因 R^{-1}是 B 到 A 的关系，S 是 C 到 B 的关系，

$S^{-1}\cdot R^{-1}$是可以复合的，而 $R^{-1}\cdot S^{-1}$是不可能复合。

证明：$\forall<z,x>\in(R\cdot S)^{-1}$

$\Rightarrow<z,x>\in(R\cdot S)$

$\Rightarrow\exists y\in B,<x,y>\in R,<y,z>\in S$

$\Rightarrow<y,z>\in S^{-1}$，$<x,y>\in R^{-1}$，

$\Rightarrow <z,x> \in S^{-1} \cdot R^{-1}$

$\backslash (R \cdot S)^{-1} \subseteq S^{-1} \cdot R^{-1}$

$\forall <z,x> \in S^{-1} \cdot R^{-1}$

$\Rightarrow \exists y \in B, <z,y> \in S^{-1}, <y,x> \in R^{-1}$

$\Rightarrow <x,y> \in R, <y,z> \in S$

$\Rightarrow <x,z> \in R \cdot S$

$\Rightarrow <z,x> \in (R \cdot S)^{-1}$

$\backslash\ S^{-1} \cdot R^{-1} \subseteq (R \cdot S)^{-1}$

从而，$(R \cdot S)^{-1} = S^{-1} \cdot R^{-1}$

注意：复合关系的逆等于它们逆关系的反复合

而$(R \cdot S)^{-1} \neq R^{-1} \cdot S^{-1}$因$R^{-1}$是 B 到 A 的关系，S 是 C 到 B 的关系，

$S^{-1} \cdot R^{-1}$是可以复合的，而$R^{-1} \cdot S^{-1}$是不可能复合的。32：10

例 8，某合 A={a,b,c},B={1,2,3,4,5},R 是 A 上关系，S 是 A 到 B 的关系。

R={<a,a>，<a,c>，<b,b>，<c,b>，<c,c>}

S={<a,1>，<a,4>，<b,2>，<c,4>，<c,5>}

则，R・S= {<a,1>，<a,4>，<a,5>，<b,2>，<c,2>,<c,4>,<c,5>}

R^{-1}={<a,a>，<b,b>，<b,c>，<c,a>，<c,c>}

S^{-1}={<1,a>，<2,b>，<4,a>，<4,c>，5c,c>}

$S^{-1} \cdot R^{-1}$= {<1,a>，<2,b>，<2,c>，<4,a>，<4,c>,<5,a>,<5,c>}

可验证了　　$S^{-1} \cdot R^{-1}$=（R・S）$^{-1}$　　36：07

§4.3　关系的性质

本节研究的关系均为在 A 上的关系。

一、自反性和反自反性。

1、定义：<u>定义 11</u>：设 R 是 A 上的关系。

（1）若∀a∈A，均有<a,a>∈R，则称 A 上的自反关系，或称 R 具有自反性。

（2）若∀a∈A，均有<a,a> ∉R，则称 R 为 A 上的反自反关系，或称 R 具有反自反性。

说明：

（1）注意“任意”，“均”这两个词，例 A={a,b,c}，

R1={<a,a>，<b,b>，<c,c>，<a,b>，<c,a>},R1 是自反关系，

R2={<a,b>，<b,c>，<c,a>},R2 是反自反关系，

R3={<a,a>,b,c>}，R3 中缺<b,b>,<c,c>，故不是自反关系，又因 R3 中有<a,a>，故

R3 又不是反自反关系。

（2）如果 R 不是自反关系，则 R 未必一定是反自反关系。一个关系可能既不是自反关系，

也不是反自反关系。　　40：54

2、例子：

例 1：R 是 N 上的整除关系，则 R 具有自反性

证明：Ax∈N，x 能整除 x，∴<x,x>∈R，∴R 具有自反性。

例 2：R 是 Z 上的同余关系，则 R 具有自反性，

证明：Ax∈Z，x-x/k=0∈Z，∴x 与 x 横直同余，

∴<x,x>∈R，∴R 具有自反性。

其它≤，≥关系，倍数关系，人与人的同姓关系。集合的≤关系，均是自反关系。

例 3：N 上的互质关系是反自反关系。

证明：$A x\in N$，x 与 x 是不互质的，∴$<x,x>\in R$，∴R 具有反自关系。

其他的例实数上的＜，＞关系,人与人的父子关系,均是反自反关系。

44:38

3、关系矩阵的特点：

自反关系的关系矩阵的对角元素均为 1，

反自反关系的关系矩阵的对角元素均为 0。

4、关系较图的特点：

自反关系的关系图，每个结点均有自回路，而反自反关系的关系图的每个结点均没有自回路。

5、结论：R 是 A 上的关系，则：

（1）R 是自反关系的主要条件是 $I_A\leqslant A$

（2）R 是反自反关系的主要条件是 $R\cap I_A=\Phi$。47:05

定理 7：设 R，S 是 A 上的自反关系，则 R^{-1}，$R\cup S$，$R\cap S$，也是 A 上的自反关系。

证明：$A a\in A$,因 R,S 是自反关系，∴$<a,a>\in R$，$<a,a>\in S$，

∴$<a,a>\in R\cap S$，∴$R\cap S$ 是自反关系。

注：可以放松为：R 与 S 中如果有一个是自反关系，

则 $R\cup S$ 也是自反关系。如 R 自反，∴$I_A\subseteq R\subseteq R\cup S$，∴$R\cup S$ 就是自反关系。

如$|A|=n$，$|A\times A|=n^2$其中 n 个有序对对应自回路，自反关系所有自回咱必须有：

故 A 上自反关系共有 $2^{n(n-1)}$ 个。

例$|A|=3$，A 上关系共有 2^9个，而自反关系共有 2^6个。51：28