2、三个特殊的关系：

定义 4：对于集合 A

(1)∅是 A×A 的子集，由∅定义的 A 上的关系，称为 A 上的空关系；

(2) A×A 本身也 A×A 的子集，由 A×A 定义的 A 上的关系称为 A 上的全关系，记作 E_A 即 $E_A=\{<a,b>|a\in A,b\in A\}$

(3)$I_A=\{<a,a>|a\in A\}$称为 A 上的恒等关系

例 1：设集合 A={0,1,2}

$E_A=\{<0,0>,<0,1>,<0,2>,<1,0>,<1,1>,<1,2>,<2,0>,<2,1>,<2,2>\}$

E_A 是 A 上的全关系　　$|E_A|=|A\times A|=9$

$I_A=\{<0,0>,<1,1>,<2,2>\}$，$I_A$ 是 A 上的恒等关系，$|I_A|=|A|=3$　　5:32

二、几个常用的关系的例子

例 2：<u>小于等于关系</u>，A={1,2,3}定义 A 上的关系

$L_A=\{<a,b>|a,b\in A,a\leqslant b\}$

则 $L_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$

例 3：<u>整除关系</u>设 B={1,2,3,4,5,6}定义 B 上二元关系，$D_B=\{<a,b>|a,b\in B,b/a\in N\}$，则

$D_B=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6><2,2>,$

$<2,4>,<2,6>,<3,3>,<3,6>,<4,4>,<5,5>,<6,6>\}$

注：$b/a\in N$ 说成"a 能整除 b"，或“b 能除整除以 a”，“b 能被 a 整除”。　　10:02

例 4：<u>同余关系</u>，A={1,2,3,4}A 上的二元关系。

$R=\{<a,b>|(a-b)/2\in Z,a,b\in A\}$

则

$R=\{<1,1>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,1>,<3,3><4,2>,<4,4>\}$

说明：此关系称为“模 2 同余关系”记作 $a\underline{=}b(mod_2)$

类似有“模 3 同余”模 4 同余…等”

例 5：　<u>包含关系</u> A 是一个集合，定义 P(A)上的一个关系，

$R_{\subseteq}\{<u,v>|u\in P(A),v\in P(A),且 u\subseteq v\}$

例如 A={a,b}，P(A)={ ∅,{a},{b},A}

$R_{\subseteq}$={<∅,{a}>,<∅,{b}>,<∅,∅>,<∅,A>,<{a},{a}>,<{a},A}>,<{b},{b}>,<{b},A>,<A,A>}　　15:17

例 6：设 A={2,3,4,5,6}分别列出下列关系。

<1>　R={<a,b>|a 是 b 的倍数}

R={<2,2>　,<3,3>,<4,2>,<4,4>,<5,5>,<6,2>,<6,3>,<6,6>}

<2>　R={<a,b>|$(a-b)^2\in A$}

R={<2,4>,<3,5>,<4,6>,<4,2>,<5,3>,<6,4>}

<3>　R={<a,b>|a/b 是素数}

R={<4,2>,<6,3>,<6,2>}

<4>　R={<a,b>|a≠b}

$R=E_A-I_A$，共有 25-5 个有序对。

<5>　R={<a,b>|a,b 互质}

R={<2,3>,<2,5>,<3,2>,<3,4>,<3,5>,<4,3>,<4,5>,<5,2>,<5,3>,<5,4>,<5,6>,<6,5>}

说明：a,b 互质，即 a,b 的最大公约数为 1。21:18

三、关系矩阵和关系图。

1、　关系矩阵：

定义 5：设集合 $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1\cdots b_n\}$

R 是 A 到 B 的关系，则 R 的关系矩阵是一个 m×n 阶的矩阵

$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$　r_{ij} =1，当<ai,bj>∈ R

=0，当<ai,bj>∈ R

如果 R 是 A 上的关系时，则其关系矩阵是一个方阵。

例 7：A={a,b,c,d}

B={x,y,z}，|A|=4|B|=3，R={<a,x>,<a,z>,<b,y>,<c,z>,<d,y>}

则 M_R 是 4×3 的矩阵

$$M_R=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \\ \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \end{array}$$

其中 $r_{13}=1$ 表示<a,z>∈R，而 $r_{23}=0$，表示<b,z>∉ R

26:54

例 6 中 A={2,3,4,5,6}则 R_1={<a,b>|a 是 b 的倍数}关系

$$MR_1=\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \end{array}$$

图如下：

说明：<1>空关系∅的关系矩阵 M_Φ的所有元素为 0

<2>全关系 E_A 的关系矩阵 M_E 的所有元素为 1

<3>恒等关系I_A 的关系矩阵 M_I 的所有对角元为 1.

非对角均为零，此矩阵在线性代数中称为单位矩阵，记作 I。

33:04

四、关系图：

定义 6：设 A={a_1,…,a_m}，B={b_1,…,b_n}，(A≠B)

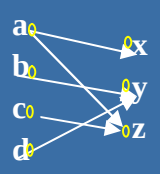
<1> R 是 A 到 B 的关系，通 m+n 个空心点分别表示 a_1,…,a_m 和 b_1,…,b_n(一般分列两边)，这些空心点称为结点。

如果<ai,bj>∈R,则由结点 ai 向结点 bj 通一条有向弧,箭头指向 bj;如果<ai,bj>∉R。则不画相应的弧。这样形成的图称为关系 R 的关系图。

<2> 如 R 是 A 上的关系,则画 m 个空心点表示 $a_1,\cdots,a_m$,(不画 2m 个结点,而且不再分列两边)有向弧,画法同(1),如果<ai,ai>∈R,则画一条以 ai 到自身的一条有向弧,这种弧称为自回路。39:03

例 9,例 7 中 R={<a,x>,<a,z>,<b,y>,<c,z>,<d,y>}

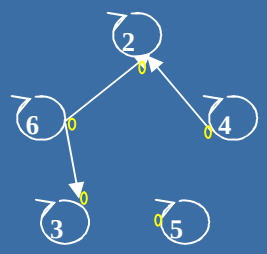
则关系图为



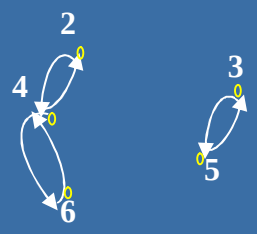
41：08

例 6 中：A={2,3,4,5,6}

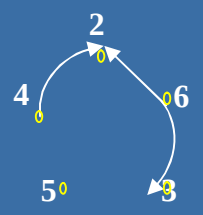
(1) R_1 倍数关系



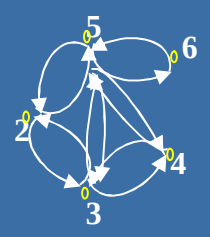
(2) R_2 $(a-b)^2\in A$



(3) R_3 a/b 是素数



(4) R_4 a,b 互质



49:15

说明：A 到 B 的不同的关系共有多少？

如|A|=m,|B|=n,|A×B|=mn,而关系是 A×B 的子集,根据幂集个数的结论,A×B 的子集共有 2^{mn},所以,A 到 B 的关系共有 2^{mn} 个。

如 A=B,则 A 上的关系共有 2^{n^2} 个。