3.对偶图：

定义 6:给定平面图 $G=<V,E>$,$F_1,F_2\cdots\cdots F_r$ 为 G 的 r 个面,如果存在一个图 $G^*=<V^*,E^*>$是如此构造的。

1)对图的任一个面 Fi 内部取一个点 $v_i^*\in V^*$

2)若 G 的面 F_i,F_j 有公共边 e_k 则作

$e_k^*=<v_i^*,v_j^*>$,且与 e_k 相交

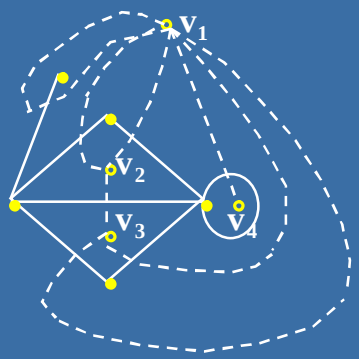
3)当且仅当 e_k 只是一个面 F_i 的边界时,(割边)v_i^*存在一个环 e^*_k 且 e^*_k 与 e_k 相交。

满足以上 3 个则称图 G^*为 G 的对偶图。

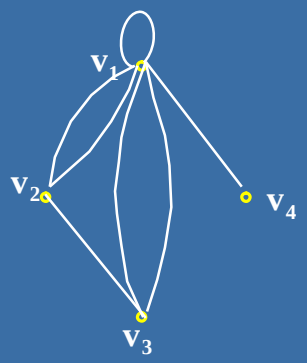
易得$|V|=|F^*|$,$|F^*|=|V|$,$|E|=|E^*|$

平面图的对偶图仍满足欧拉定理,且仍是平面图。

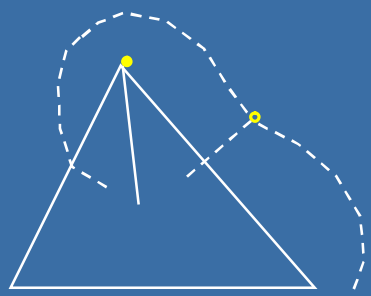
例:

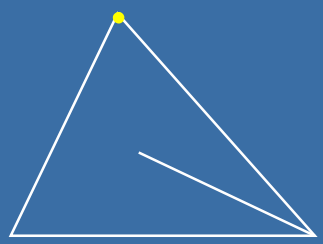


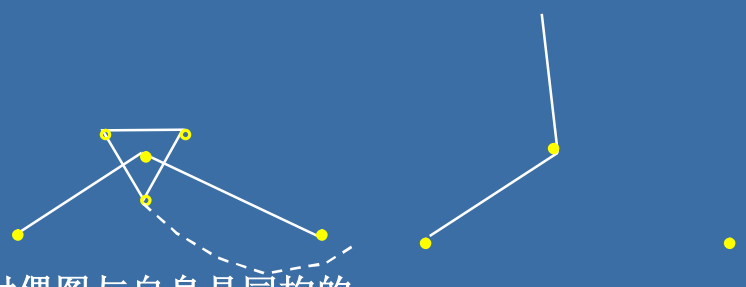
4 个面,5 个点,7 条边



4 个点,5 个面,7 条边







该图的对偶图与自身是同构的。

定义 7:如果平面图 G 的对偶图 G^*与自身 G 同构,就称 G 为自对偶图。

K_4是自对偶图,K_3不是自对偶。

§6.4 树

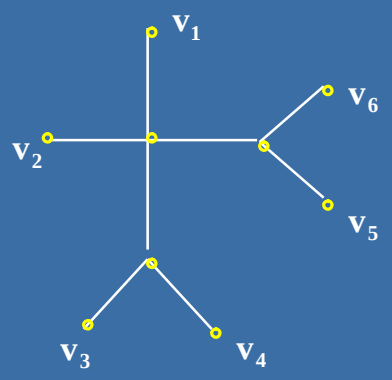
一、树的概念:

定义 8:连通且无回路的无向图称为树。用 T 表示,

T 中度数为 1 的点称为叶,度数大于 1 的结点称为分支点或内点。

非连通图的每个连通分支是树的无向图称为森林。

平凡图也是树称为平凡树。



图中 v_1 到 v_6 均是叶,其他点是分支点。

定理 14:给定图 T=<V,E>,以下关于树的命题是等价的。

<1>　T 是连通且无回路

<2>　T 无回路且 m=n-1,其中|V|=n,|E|=m

<3>　T 连通且 m=n-1

<4>　T 无回路,但增加一边后得到且仅得一个回路

<5>　T 连通,但删去任一边后就不连通

<6>　每一对结点间有且仅有一条通路。

证明:（1）Þ（2）

当 n=2 时,连通无回路则 m=1,满足 m=n-1

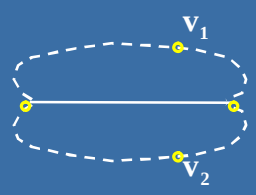
设 n=k 时结论成立。当 n=k+1 时,因 T 连通无回路,所以至少有一点的度数为 1,在 T 中删去该点及相关联的边得到 k 个结点的连通且无回路的图,由归纳法假设它有 k-1 条边,故原来有 k 条边,故结论在 n=k+1 时成立。

（2）Þ（3）只要证连通,反证如 T 不连通,设 T 的连通分支数为 k,k>1,每个连通分支是树,点数为 $n_1,n_2,\cdots n_k$ 边数则由（2）知为 $n_1-1,n_2-1,\cdots n_r-1$

∴$m=n_1+n_2+\cdots+n_k-k=n-k<n-1$ 矛盾,故 T 是连通的。

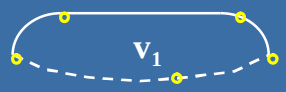
（3）Þ（4）由归纳法可以证明 T 是无回路的（略）

任取两点 u,v∈V 因 T 连通故 uv 间有一条路 P。



将 uv 两点间加一条边则必构成回路,如 uv 两点间一条边构成两个回路 $u\cdots v_1\cdots v_u$ 和 $u\cdots v_2v_u$ 则原来的图就有回路 $u\cdots v_1\cdots v\cdots v_2\cdots u$。

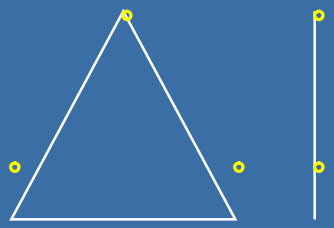
（4）Þ（5）任取两结点 u,v∈V,加上边（u,v）就构成回路 uv…v_1…u 则原来 u 到 v 之间就有一条通路 u…v_1…v



T 中任取一条边 e∈E,e=(u,v)如果删掉 e 仍连通 u 到 v 另有一条路,则原来就有回路。

（5）Þ（6）反证如果两结点间有两条通路,则该图必有回路则删去回路上的一边 T 仍是连通的与(5)矛盾。

（6）Þ（1）任两点间均有路,则 T 是连通的,反证如 T 是有回路的,则必存在两点,使该两点间有两条路,与（6）矛盾。



推论:任何非平凡树,T=<V,E>至少存在两个叶。

证明:因 T 连通则"u∈T,

deg(v)≥1 设 T 有 k 个一度点,其它点均大于等于 2，则 $2m=\sum deg(v_i)$

$\geq k+2(n-k)=2n-k$

因 m=n-1,∴2（n-1）≥2n-k,则 k≥2。

例:设 T=<V,E>是树,如|V|=20,树叶共有 8 个,其它点的度数均≤3,问题 2 度点和 3 度点各有多少。

解:设 2 度点为 x 个,则 3 度点为 20-8-X。

因 $2m=\sum deg(v_i)$而 m=n-1

∴2×(20-1)=1×8+2x+3(20-8-x)

解为 x=6,则 3 度点共有 20-8-6=6

二、生成树及其应用

1、生成树

定义 9:若 G 的生成子图是一棵树,则称这棵树为 G 的生成树,设 G 的一棵生成树为 T,则 T 中的边称为树枝,在 G 中而不在 T 中的边称弦,所有弦的集合称为生成树 T 的补。

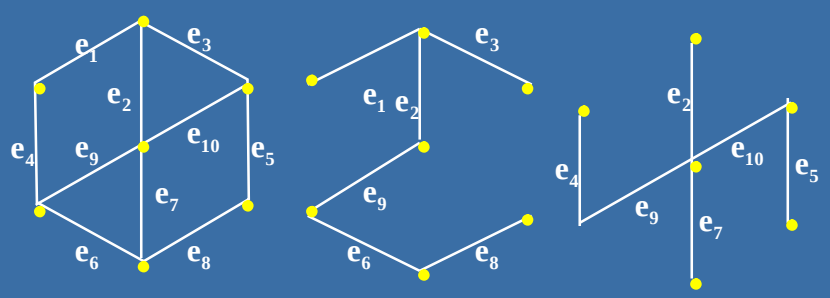


图 G 共有 7 个点 10 条边的连通图,要去掉 4 条边成为树,{ e_1,e_2,e_3,e_9,e_6,e_8 }生成的 G 的子图是 G 的生成树,

e_1,e_2,e_3,e_9,e_6,e_8 是树枝,而 e_4,e_5,e_7,e_{10} 是弦,而{ $e_2,e_4,e_5,e_7,e_9,e_{10}$ }也是 G 的一个生成树,可见生成树不是唯一的。

定理 15:连通图 G 至少有一棵生成树。

证明:如果 G 无回路,则 G 本身就是它的生成树,如 G 有回路,则在回路上任取去掉一条边仍是连通的,如 G 仍有回路,则继续在该回路上去掉一条边,直到图中无回路为止,此时该图就是 G 的一棵生成树。

一般如果 G 有 n 个点 m 条边连通,则 m≥n-1,则 G 删除 m-(n-1)条边。破坏了 m-(n-1)个回路，必成 G 的一棵生成树,这是"破圈法"。

也可以从 m 条边中选取 n-1 条边并使它不含有回路,这是"避圈法"。

定理 16:T 是连通图 G 的生成树,则

(1)G 的任何边割集与 T 至少有一条共公边

(2)G 的任何回路与 T 的补至少有一条共公边。

因边割集的边均去掉,图就不连通,则边割集至少有一条边要留在树 T 中,而回路中至少要去掉一边,因而该边就在 T 的补中。

2、最小先成树

设 G=<v,E,w>是一带权连通图,G 的生成树 T 树 T 的权 w（T）就是 T 的边上的权和。

定义 10:在权图 G 所有生成树中,带权最小的那棵树称为 G 的最小生成树。

求最小生成树的克鲁斯卡尔算法(避圈法)

1.在 G 中选取最小权的边,记作 e_1,置 i=1

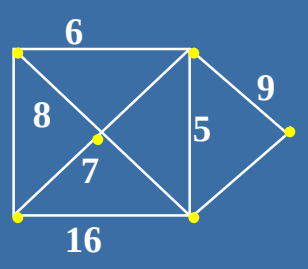
2.当 i=n-1 时结束,否则转 3。

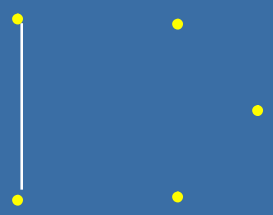
3.设已选择边为 $e_1,e_2,\cdots\cdots e_i$,此时无回路。

在 G 中除这 i 条边外,选择边 e_{i+1},该边使得$\{e_1,\cdots,e_{i+1}\}$生成的子图中无回路,并 e_{i+1}是满足该条件中权最小的一条边。

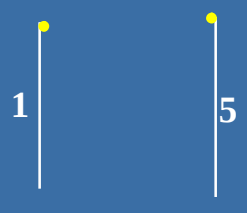
4.置 i:=i+1,转 2

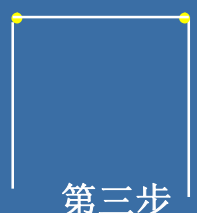
例:G 有 5 个点 8 条边,从中选 4 条边。



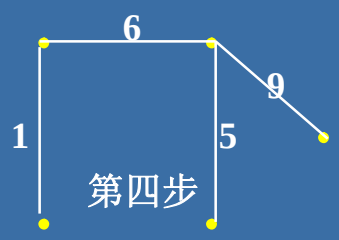


第一步





第三步



选取了 4 条边,始终保持无回路,因此是连通的,w(T)=21

作业:

P194 练习 6.1(A)1,2,3

(B)1,2

P198 练习 6.2 1,2,3

注:第三题如是,写出哈密尔顿回路;

如不是,写出理由

P206 练习 6.3(A)1,2,3

(B)1,2,3,4

注:第二题“面的总数”改为“面的总次数”

P226 习题 6

2,3,5,6,7,8(a)(c),9,10(a)(c),11(a)(b)