$\leftrightarrow$ $\rightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\neg$ $\wedge$ $\vee$

第四节 范式

一、对偶式和对偶原理

定义 1：在仅含有联结词$\neg$, $\vee$，$\wedge$，的命令题公式 A 中，将$\vee$换成$\wedge$，将$\wedge$换成$\vee$，同时 T 和 F（既 0 和 1）互相替代，所得公式 A^*称为 A 的对偶式。显然 A 是 A 的对偶式 A^*的对偶式。

例一．试写出下列命题公式的对偶式

（1）A：（$P\wedge Q$）$\vee R$

则 A^*为（$P\vee Q$）$\wedge R$

（2）A：（$P\wedge Q$）$\vee$（$P\wedge\neg$（$Q\vee\neg S$））

则 A^*为（$P\vee Q$）$\wedge$（$P\vee\neg$（$Q\wedge\neg S$））

（3）A：（（$P\vee Q$）$\wedge 0$）$\wedge$（$1\wedge\neg$（$R\vee\neg P$））

则 A^*为（（$P\wedge Q$）$\vee 1$）$\vee$（$0\vee\neg$（$R\wedge\neg P$））

下面两个定理是对偶定理

定理 2：A 和是互为对偶式，P，P_2 ，……P_n 是出现在 A 和的原子变元，则

$\neg A$（P，…，P_n）$\Leftrightarrow A^*$（$\neg$ P，…，$\neg P_n$）

A^*（$\neg$ P，…，$\neg P_n$）$\Leftrightarrow\neg A^*$（P，…，P_n）

即公式的否定等值于其变元否定的对偶式。

例：A 为 $P\vee Q$，则 A^*为 $P\wedge Q$，则$\neg$（$P\vee Q$）$\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$

这就是 De Morgan 律。

再例如：A 为（$P\wedge\neg R$）$\vee Q$ 则 A^*为（$P\wedge\neg R$）$\wedge Q$ 则$\neg$（（$P\wedge\neg R$）$\vee Q$）$\Leftrightarrow$ （$\neg P\vee R$）$\wedge\neg Q$

定理 3：设 A^* ，B^*分别是 A 和 B 的对偶式，如果 $A\Leftrightarrow B$，则 $A^*\Leftrightarrow B^*$。

这就是对偶原理。如果证明了一个等值公式，其对偶式的等值式同时也成立。可以起到事半功倍的效果。

例如：$A\Leftrightarrow$（$P\wedge Q$）$\vee$（$\neg P\vee$（$\neg P\vee Q$））　　$B\Leftrightarrow\neg P\vee Q$　　可以证明 $A\Leftrightarrow B$

而 A 的对偶式为 $A^*\Leftrightarrow$（$P\vee Q$）$\wedge$（$\neg P\wedge$（$\neg P\wedge Q$））

B 的对偶式为 $B^*\Leftrightarrow\neg P\vee Q$

根据对偶原理，则 $A^*\Leftrightarrow B^*$也成立。

说明：1）含有另外三个联结词$\leftrightarrow$ ，∇，$\rightarrow$的公式，必须将其归化为然后再化为对偶式。

例：$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow$（$\neg P\vee Q$）$\wedge$（$P\vee\neg Q$）

$P\nabla Q\Leftrightarrow$（$\neg P\wedge Q$）$\vee$（$P\neg\wedge Q$）

从而可知 $P\leftrightarrow Q$ 的对偶式是 $P\nabla Q$

2）对偶原理不是说 A 与其对偶式 A^*等值，一般公式与对偶是不是等值的。

二、范式：

1. 简单析取式和简单合取式

定义 2：仅有有限个命题变元或其否定的析取构成的析取式称为简单析取式。而仅有有限个命题变元或其否定的合取构成的合取式称为简单合取式。例如：$\neg P\vee Q\vee R$，$\neg P\vee\neg Q\vee P$ 是简单析取式，$\neg P\wedge R$，$Q\wedge R\wedge\neg Q$ 是简单合取式。P，$\neg Q$ 一个变项本身可以看作简单析取式也可以看作简单合取式。

而$\neg P\vee$（$Q\vee R$），（$P\wedge Q$）$\vee\neg R$ 不是简单析取式。

2. 范式：

定义 3：

① 析取范式：由有限个简单合取式的析取构成的析取式称为析取范式。

② 合取范式：由有限个简单析取式的合取构成的合取式称为合取范式。

例：$P\vee(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$ 是析取范式

$(P\vee Q)\wedge\neg Q\wedge(Q\vee\neg R\vee S)$ 是合取范式

$P\vee Q\vee R$ 是析取范式是三个简单合取范式的析取，同时也是合取范式是一个简单析取范式的合取。而 $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge(Q\vee R))$ 不是析取范式，因为 $\neg P\wedge(Q\vee R)$ 不是简单合取范式。含有双重刮号的公式，肯定不是范式。

$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R)$ 不是合取范式，因为其含有 $\rightarrow$，范式中只能包含 $\wedge$、$\vee$、$\neg$ 等逻辑联结词。

3、范式的存在性

定理：任意一个命题公式均存在一个与之等值的析取范式和合取范式

此定理证明是一个构造性证明，证明过程说明了公式的范式如何求得。

第一步： 将公式中出现的 $\rightarrow$，$\leftrightarrow$，∇，用 $\neg$，$\vee$，$\wedge$ 来归化。

所用公式为 ⑴ $P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$

⑵ $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$

⑶ $P\nabla Q\Leftrightarrow(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)$

$\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(\neg P\wedge\neg Q)$

第二步：用双重否定律 $\neg\neg P\Leftrightarrow Q$，或用德莫根律将 $\neg$ 一直移到命题变元之前

第三步：用分配律、结合律化去额二重以上刮号成为析取范式或合取范式

例 2：求公式 $((P\vee Q)\rightarrow R)$ 的析取范式和合取范式

解：$((P\vee Q)\rightarrow R)\Leftrightarrow\neg(\neg(P\vee Q)\vee R)\vee P\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge\neg R)\vee P$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg R)\vee P$ 析取范式

$\Leftrightarrow(P\vee(P\wedge\neg R))\vee(Q\wedge\neg R)\Leftrightarrow P\vee(Q\wedge\neg R)$ 析取范式

原式：$\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge\neg R)\vee P\Leftrightarrow(P\vee Q\vee P)\wedge(\neg R\vee P)$ 合取范式 $\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee\neg R)$ 合取范式

例 3：求公式 $(P\vee Q)\rightarrow(Q\leftrightarrow R)$ 的析取范式和合取范式

解：$(P\vee Q)\rightarrow(Q\leftrightarrow R)\Leftrightarrow\neg(P\vee Q)\vee(Q\wedge R)\vee(\neg Q\wedge\neg R)\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge R)\vee(\neg Q\wedge\neg R)$ 析取范式

原式 $\Leftrightarrow\neg(P\vee Q)\vee((Q\vee\neg R)\wedge(\neg Q\wedge R))\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)\vee((Q\vee\neg R)\wedge(\neg Q\wedge R))$ $\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg Q\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg Q\vee\neg Q\vee R)$ 合取范式 $\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$ 合取范式

总结：

一个公式的析取范式与合取范式并不唯一。要使任一命题公式化为唯一的等值命题的标准形式，就要用到主析取范式与主合取范式的概念。