第二章　　谓词逻辑

苏格拉底三段论：

凡人要死，苏格拉底是人，所以苏格拉底要死，

P：凡人要死

Q：苏格拉底是人

R：苏格拉底要死

此三段论表示为（P∧Q）→R

苏格拉底三段论是正确的，但 P∧Q→R 却不是重言式，这就是命题逻辑的局限性。

§2.1 谓词逻辑的基本概念

一、　谓词

1.个体域：

命题逻辑中将命题（句子）继续细分。命题是由主语和谓语两部分组成。主语是名词，称之为个体词。是独立存在的客体，可以是具体事物也可以是抽象概念。

在谓语中含有宾语，它也是名词，它也是个体词。

个体域：客体（个体）的取值范围。

例如：吴华是大学生，用 P 表示，

李明是大学生，用 Q 表示。

在命题逻辑中就没办法表示出两句的联系。

“……是大学生”用 A（X）表示，x 是大学生，命题符号含有个体词变量。

a 表示吴华，A（a）表示吴华是大学生。

b 表示李明，A（b）表示李明是大学生。

相当于“……是大学生”，用 A（•）来表示，这就是谓词。

例：张三比李四高，

用 H（x,y）表示 x 比 y 高。

a:张三 b:李四

H（a,b）：张三比李四高

H（b,a）：李四比张三高

x,y,a,b 表示客体，H（•，•）是谓词这个谓词涉及了两个客体，是二元谓词。

2.谓词：

只涉及一个客体的谓词称为一元谓词，涉及两个客体的谓词称为二元谓词，涉及 n 个客体的谓词称为 n 元谓词。

一般，如 A 表示谓词符号，用 X_i 表示第 i 个客体变项，则 n 元谓词表示为 A（$x_1,\ldots,x_n$）,如 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是个体域中的客体名词，则 A（$a_1,a_2,\ldots,a_n$）是个命题。不含客体变项的谓词称零元谓词，零元谓词本身就是命题。

注意：

（1）n 元谓词中，客体变项的次序很重要 。

例：F（x,y）表示 x 是 y 的父亲，

a:张三，b:张小明。

F（a,b）表示张三是张小明的父亲。

F（b,a）表示张小明是张三的父亲。

两个命题至多一个是真

（2）在讨论一个问题是必须先确定好个体域 D。

如不作限制，表示宇宙一切事物组成的个体，成为全总个体域。

（3）同一个 n 元谓词，取不同的客观，真假会不同。

A（x）：x 是大学生。 A（a） 真值可能为真，而 A（b）真值可能为假。

（4）对于同一谓词，个体域 D 不同，真值可能也不同。

例：对于 A（x），x 是大学生。

如 D={大学生全体}，A（x）是重言式。

如 D={学生全体}，A（x）是仅可满足式。

如 D={计算机全体}，A（x）是永假式。

3.命题函数

对于谓词 B（x），B（x,y），H（x,y,z）等，本身不是命题。

只有命题变项在 D 中取出个体名称时才成为一个确定的命题。

故谓词也称为命题函数或简单命题函数。

有限个简单命题函数用联结词¬，∧，∨，→，↔，∇进行联结而成，成为复合命题函数。

二、 量词：

1.全称量词：

“所有的”，“任何一个”，“每一个”，“凡是”，“一切”表示个体域中每一个，用符号“∀”表示，称为全称量词。

例 1：将下列命题符号化

（1）所有人都要呼吸

（2）每个人都是要死的

解:（1）设 M（x）：x 是人，M（x）：x 是要呼吸。

命题符号化为：∀x（M（x）→H（x））。

（3）设 M（x）：x 是人，D（x）：x 是要死的。

命题符号化为：∀x（M（x）→D（x））。

2.存在量词：

“有些”，“存在”，“至少有一个”，表示个体域 D 中存在个体，用符号“∃”表示。

例 2：将下列命题符号化

（1）有些人是聪明和美丽的。

（2）有人早饭吃面包。

解：（1）设 M（x）：x 是人，Q（x）：x 是聪明的，

R（x）：x 是美丽的。

命题符号化为：∃x（M（x）∧Q（x）∧R（x））。

（3）设 M（x）：x 是人，E（x）：x 是早饭时吃面包，

命题符号化为：∃x（M（x）∧E（x））

说明：命题符号化之前，必须明确个体域的范围，以上两例子均为全总个体域。

如果将个体域改为 D={人类}，则特性谓词 M（x）就不需要了。

例 1：（1）∀xH（x），（2）∀xD（x）

例 2：（1）∃x（Q（x）∧R（x））

（2）∃xE（x）

3.含量词的谓词的真值规定

说明：不含量词的谓词公式 G（x），它不是命题，而是命题函数，其真值依赖于 x 从个体域中取的个体名词的不同而不同。

例：D 表示某班全体学生，G（x）表示 x 是男生。

则 G（李刚）是真，而 G（王芳）是假。

而∀xG（x）与∃xG（x）是命题了，x 仅是一个“指导变量”

∀xG（x）与∀xG（y）意义完全相同。

∀xG（x）：全班每个人均是男生。

∃xG（x）：全班存在一个人是男生。

含量词的谓词公式的真值不再依赖于 x 的选取了。

（1）∀xG（x）的真值规定

∀xG（x）的命题是“对任意 x∈D，均有 G（x）”

∀xG（x）的真值为 1，当且仅当，对一切 x∈D，G（x）真 值

均为 1，$\forall xG(x)$ 的真值为 0，当且仅当，对一切 $x_0 \in D$，
$G(x_0)$ 真 值为 0。

（2）$\exists xG(x)$ 的真值规定

$\exists xG(x)$ 的命题是“存在一个 $x_0 \in D$，使得 $G(x_0)$ 成立”

$\exists xG(x)$ 的真值为 1，当且仅当存在 $x_0 \in D$，
$G(x_0)$ 的真值为 1。

$\exists xG(x)$ 的真值为 0， 当且仅当，对一切 $x \in D$，
$G(x)$ 的真值为 0。

例如：D={a,b,c},由以上规定可知：

$\forall xG(x) \Leftrightarrow G(a) \wedge G(b) \wedge G(c)$

$\exists xG(x) \Leftrightarrow G(a) \vee G(b) \vee G(c)$

注：对于一个谓词，如其每个变量均在量词的管辖下，则该不是命题函数，而是命题了，它有确定的真值了。