第 2 编　集合论

第 3 章　集合及其运算

§3.1 集合的概念和表示方法

一、集合：

将一个确定的，可以区分的事物的全体称为集合，而这些事物称为集合的 元素。

集合用大写字母 A，B,…来表示，而集合的元素一般用小写字母表示。

若 a 是 A 的元素 称 a 属于 A，记作 $a\in A$。 若 a 不是 A 的元素 称 a 不属于 A，记作 $a\notin A$。

有限集：集合的元素个数是限的。

无限集：集合的元素个数是无限的。

有限集 A 的元素个数记作 $|A|$。　　3:32

二、集合的表示方法：

特定的一些集合的表示符号

（1）　自然数集 N={0，1，2，…}

（2）　整数集合 Z={…-2，-1，0，1，2，…}

（3）　有理数集合 $Q=\{x|x=P/q，p,q\in Z\}$

（4）　实数集合 R={ x ｜ x 是实数}

（5）　复数集合 $C=\{x|\ x=a+bi,a,b\in R,i=-1\}$　　6:30

集合的两种描述方法：

1、 列举法：

例：A={a,b,c,d} N={0,1,2…}

用花括号起来 可以是有限集,可以是无限集。

2、 描述法：

A={ x ｜x 具有某种性质}

例：$B=\{x\ |1\leqslant x\leqslant 5,x\in R\}$

$C=\{x\ |x^2-1=0,\ x\in R\}$

$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1，x,y\in R\}$

$G=\{x\ |x/2\in Z,x\in Z\}$　　13:27

说明：1、描述法中 $A=\{x\ |1\leqslant x\leqslant 5\}$与 $A=\{y|1\leqslant y\leqslant 5\}$是表示同一个集合

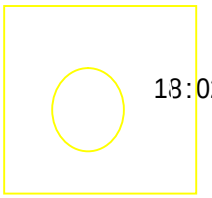
2、集合中元素是无序的。

{a,b,c},{a,c,b},{b,c,a}表示同一个集合。

3、集合中的元素可能也是集合，

例：A={1，{2}，2，{3，4}，{6}}

|A|=5，2∈A，{2}∈A，6∉A,{6}∈A



13:02

三、集合的关系：

1、 包含：

定义 1：A，B 两集合，∀x∈A⇒x∈B，记 A⊆B。 这种图称为文氏图

读作 A 包含于 B；或 B ⊇ A，读作 B 包含（了）A。

注意：可能 A⊆B 或 B⊆A，也可能两者均不成立，不是两者必居其一。

例：N⊆Z⊆Q⊆R。 20:51

2、 相等：

定义 2：若 A⊆B，且 B⊆A 则称 A，B 相等，记作 A=B。

即∀x∈A 则 x∈B，并且有∀x∈B 则 x∈A。

若 A，B 不相等记作 A≠B。

3、 真子集：

定义 3：若 B⊆A 且 B≠A，则称 B 为 A 的真子集。

记作 B ⊂ A，或 A ⊃ B

对一切 x 如果 x∈B 必有 x∈A，并且存在一个 x_0∈A 且 x_0∉B， 24:35

包含关系的性质

（1）自反性：对一切集合 A，总有 A⊆A

（2）反对称性：任意两个集合，若 A⊆B，B⊆A，即 A=B

（3） 传递性：任意集合 A，B，C 若 A⊆B，B⊆C,则 A⊆C。 25:57

四、特殊的集合

1、 空集：

定义 4：不含任何元素的集合称为空集，记作 ∅ 。

例如：Z={x|x^2+1=0,x∈R}，这是空集。

定理 1：空集是任何集合的子集。

证明：反证法，若存在一个集合 A，使得∅ ⊆ A。

则存在 $x\in\varnothing$ 且 $x\in A$，这与空集的定义矛盾，

推论：空集是唯一的。

证明：设 $\varnothing_1$，$\varnothing_2$ 是两个空集，由定理 1，$\varnothing_1\subseteq\varnothing_2$ $\varnothing_2\subseteq\varnothing_1$，$\therefore\varnothing_1=\varnothing_2\therefore$ 空集是唯一的。 30：20

2、 全集：

定义 5：在所研究的同一个问题中，如果涉及到的集合均是某一个集合的子集，则称该集合是全体。记作E。

全集的概念是相对。要看具体研究的问题。

3、 幂集：

定义 6：设 A 是一个集合，由 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集，记作 P（A）或 2^A 。

该定义可以写作 $P(A)=\{u|u\subseteq A\}$

含有 n 个元素的集合称为 n 元集。

它的含有 $m(m\leqslant n)$ 个元素的子集称为它的 m 元子集。 33：55

例 3，设 $A=\{0，1，2\}$ 写出 A 的全部子集。

解：A 的 0 元子集：$\varnothing$

A 的 1 元子集：$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$

2 元子集：$\{0，1\}$，$\{0，2\}$，$\{1，2\}$。

3 元子集：$\{0，1，2\}$

A 共有 8 个子集，即 $|P(A)|=8$

一般地如果 $|A|=n$，则 A 的 0 元子集有 1 个即空集$\varnothing$，A 的 1 元子集共有 C_n^1 个，A 的 2 元子集共有 C^2_n 个，…，A 的 m 元子集共有 C^m_n 个，…n 元子集共有 $C^n_n=1$ 个，所以 A 的子集个数为 $C^0_n+C^1_n+\cdots+C^n_n=2^n$

结论：如 A 是有限集 若 $|A|=n$ 则 $|P(A)|=2^n$。

注意：组合数 C^m_n 书上写的（^n_m）。 38：08

例 5：A，B 是集合，试证：$A\subseteq B$ 的充要条件是 $P(A)\subseteq P(B)$

证明："$\Rightarrow$" $\underline{\forall u\in P(A)}\therefore u\subseteq A$，$\because A\subseteq B\therefore u\subseteq B$，$\therefore$ $\underline{u\in P(B)}$

$\therefore P(A)\subseteq P(B)$

Ü $\forall x\in A\therefore\{x\}\subseteq A$ $\therefore\{x\}\in P(A)$，

$\because P(A)\subseteq P(B)$

∴$\{x\}\in P(B)$∴$\underline{x\in B}$ ∴$A\subseteq B$ 。 43：50

例：A={a,{b}},写 P（A）。

解 P（A）={∅，{a},{{b}},{a,{b}}}

例：A={a，∅}判断下列结论是否正确。

(1)∅∈A，(2)∅⊆A，(3){∅}⊆A，

(4){∅}∈A,(5)a∈A,(6)a⊆A,

(7){a}∈A,(8){a}⊆A

结论：（1），（2），（3），（5）（8）是正确的。 48：38