6. 不可兼或（异或）∇

两个公式 P、Q 的异或是复合命题，

记作“P∇Q”

读作“P 异或 Q”，“P 不可兼析取 Q”。

不可兼或就是两个命题不可能同时为真，当且仅当一个为真，一个为假时，为真。

例：（1）今天下雨或刮风。　　（可兼或）

（2）今天第一节课是语文课或数学课。　　（不可兼或）

（3）他现在在 301 室或 302 室。　　（不可兼或）

P∇Q　真值表

P　Q	P∇Q
0　0	0
0　1	1
1　0	1
1　1	0

与或的区别：P 为 1 且 Q 为 1 时，P∇Q 为假。

性质：（1）P∇Q⇔Q∇P　　交换律

（2）（P∇Q）∇R⇔P∇（Q∇R）　　结合律

（3）P∧（Q∇R）⇔（P∧Q）∇（P∧R）　　∧对∇的分配律

（4）P∇Q⇔（P∧¬Q）∨（¬P∧Q）

⇔（P∨Q）∧（¬P∨¬Q）

（5）P∇Q⇔¬（P↔Q）

三．**命题公式：**

1.　命题公式

由命题标识符、逻辑联结词和圆括号按照一定的正确规则组成的合式，简称公式。

命题公式的规定：

（1）单个命题变项是合式公式。

（2）如果 A 是合式公式，则¬A 是合式公式。

（3）如果 A、B 是合式公式，则 A∨B、 A∧B、A→B、A↔B、A∇B 也是合式公式。

（4）当且仅当有限次运用（1）（2）（3）所得到的符号串是合式公式。

逻辑联结词的运算优先次序依次为：

¬　∧　∨　→　↔　∇

例：（P∨Q），P→（Q∧R），¬P↔（Q∧R）是公式

（P∨Q，P→，P¬Q，P⇔不是公式

P→（Q∧R）的括号可以省略

（P→Q）∧R 的括号不能省略

2.　命题变项的指派（赋值）

公式（P∧Q）→（P∨¬Q）对命题变项 P、Q、R 没有真值指定，公式没有确定的真值。

指派（赋值）：命题公式中出现 n 个不同的命题变项 $P_1 \cdots P_n$，对这 n 个命题给定

一组真值指定称为这个公式的一个指派或称为一个赋值。

若一个公式中出现 n 个不同的命题变项，每个变项分别可以取成 1、0，那么该公式共有个 2^n 不同的指派。

例：前面公式共有 P、Q、R 三个不同命题变项，则共有 $2^3=8$ 个指派。

P	Q	R
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

3. 公式的真值表

列出公式的所有指派及其相应的公式真值形成的表格称为公式的真值表

例：PC（Q∧R）的真值表

P	Q	R	（Q∧R）	P→（Q∧R
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

公式真值表对我们进行证明以及判断公式的恒真、恒假起很大作用

4. 两公式的等值

给定两公式 A、B，A、B 中共出现 n 个不同的命题变项，对于所有的个 2^n 不同的指派，A、B 两公式的真值均相同，记 A⇔B，读作“A 与 B 等值”。

说明：

等值与等价不是一回事

等价是命题联结词，是 A↔B 公式，在某些指派下为真，某些指派下为假。

等值不是逻辑联结词是公式关系符，A⇔B 描述了 A、B 两公式之间的关系，只有“成立”，“不成立”的区别。

5. 全功能联结词组

定义了六个联结词，某些联结词可以同其他联结词替换

例：P→Q⇔ ¬P∨Q

P↔Q⇔ （P∧Q）∨（¬P∧ ¬Q）

P∇Q⇔ （P∧ ¬Q）∨（¬P∧Q）

→、↔、∇可以用¬、∧、∨等代换

一个联结词集合，若对于任何一个公式均可以用该集合中的联结词来等值比较，就称他为**全功能联结词组**（**联结功能完备集**）

如果该集合任意去掉一个联结词，就不再具备这种特性，就称为**最小全功能联结词组**（**最小功能完备集**）

例：{¬、∧、∨}是全功能联结词组

又因 P∧Q=¬（¬P∧¬Q）

{¬、∧}、{¬、∨}是最小全功能联结词组

第一节小结

必须熟练掌握：什么是命题

什么是命题逻辑联结词

命题联结词的真值表的定义及命题联结词的性质

§1.2 命题公式与赋值

命题公式：简单讲就是由命题表示符，逻辑联结词，括号按正确的规律联结起来，形成的符号串。

公式的指派：一个公式中如果出现 n 个不同的命题变项，那么此公式就有 2^n 个公式指派。

公式真值表：将所有的公式指派列出来，并且相对应的列出公式的真值所得到的表格。

例：求下列公式的真值表

（1）¬P∨Q

（2）（P∧Q）∧¬P

（3）¬（P∧Q）↔（¬P∧¬Q）

（4）（P∧¬Q）→R

（5）（P→（P∨Q））∨R

（6）¬（P∧Q）∧Q∧R

六个公式的真值表如下：

（1）¬P∨Q

P	Q	¬P∨Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

（2）（P∧Q）∧¬P

P	Q	P∧Q	（P∧Q）∧¬P
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	0

（3）$\neg$（P$\wedge$Q）$\leftrightarrow$（$\neg$P$\wedge$ $\neg$Q）

PQR	P$\wedge$Q	$\neg$（P$\wedge$Q）	$\neg$P$\wedge$ $\neg$Q	$\neg$（P$\wedge$Q）$\leftrightarrow$（$\neg$P$\wedge$ $\neg$Q）
000	0	1	1	1
001	0	1	1	1
010	0	1	1	1
011	0	1	1	1
100	0	1	1	1
101	0	1	1	1
110	1	0	0	1
111	1	0	0	1

（4）（P$\wedge$ $\neg$Q）$\rightarrow$R

P	Q	R	$\neg$Q	P$\wedge$ $\neg$Q	（P$\wedge$ $\neg$Q）$\rightarrow$R
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

（5）$\neg$（P$\rightarrow$Q）$\wedge$Q$\wedge$R

P	Q	R	P$\rightarrow$Q	$\neg$（P$\rightarrow$Q）	$\neg$（P$\rightarrow$Q）$\wedge$Q$\wedge$R
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

（6）（P$\rightarrow$（P$\vee$ Q））$\vee$ R

P	Q	R	P$\vee$ Q	P$\rightarrow$（P$\vee$ Q）	（P$\rightarrow$（P$\vee$ Q））$\vee$ R
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

命题公式的分类：

永真式（重言式）：公式在一切赋值下的真值均为真。

永假式（矛盾式）：公式在一切赋值下的真值均为假。

可满足式：　如公式不是矛盾式就是可满足式，即至少存在一个赋值使公式为真。

仅可满足式：既不是矛盾式，又不是重言式的公式，即至少存在一个指派使公式为真，至少存在一个指派使公式为假。

公式 ⎧ 矛盾式
⎨
⎩ 可满足式 ⎧ 重言式
⎨
⎩ 仅可满足式

说明：

（1）公式若不是永真式未必是永假式。

（2）如公式 G 是永真式，则公式 $\neg G$ 是永假式（反之也成立）。

（3）证明公式是永真式和永假式的方法：

方法之一：使用真值表

方法之二：

否定律：$\neg P \vee P \Leftrightarrow 1$（永真式）

$\neg P \wedge P \Leftrightarrow 0$（永假式）

零一律：$P \wedge 0 \Leftrightarrow 0$（永假式）

$P \vee 1 \Leftrightarrow 1$（永真式）

第二节小结

讲解了公式的分类，永真式、永假式及其判断方法