三、主析取范式：

1．极小项

定义 4：如公式中共有 N 个命题变项 P，……，P_n 这 N 个变项的合取式中，每个变项 P_i 或其否定$\neg P_i$，均出现且两者仅出现一个，并且按命题变项的下标排列（字母按字典序列）这样的简单合取式称为极小项，又称布尔合取。

例如：公式中出现 P，Q，R 三个命题变项

$P\wedge\neg Q\wedge R$，$\neg P\wedge Q\wedge\neg R$ 是极小项

$P\wedge\neg Q$ 不是极小项，其中没出现 R

$P\wedge\neg Q\wedge\neg P$ 不是极小项，P，$\neg P$ 同时出现

2．极小项和赋值的一一对应

每一个极小项只有一个赋值使其为真，其余 2^n-1 个赋值使其为假。

例如：公式中出现 P，Q，R 三个不同的赋值。极小项$\neg P\wedge Q\wedge\neg R$，赋值 010 使其为真，其余 2^3-1=7 个赋值使其为假。这样极小项与赋值建立了一一对应关系。而$\neg P\wedge Q$ 不是极小项，有两个赋值 010，011 使其为真，其余 6 个赋值使其为假。

3．极小项的记法

公式共有 2^n 个赋值，每个赋值对应一个极小项。如极大项对应赋值 $a_1a_2a_3$，把其看作二进数，化为十进数为 $k_0 \le k \le 2^n-1$,则该极小项记作 m_{a1a2a3},也记作 m_k

极小项	对应的赋值	十进制数	记法
$\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	000	0	M_{000} 或 M_0
$\neg P\wedge\neg Q\wedge R$	001	1	M_{001} 或 M_1
$\neg P\wedge Q\wedge\neg R$	010	2	M_{010} 或 M_2
$\neg P\wedge Q\wedge R$	011	3	M_{011} 或 M_3
$P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	100	4	M_{100} 或 M_4
$P\wedge\neg Q\wedge R$	101	5	M_{101} 或 M_5
$P\wedge Q\wedge\neg R$	110	6	M_{110} 或 M_6
$P\wedge Q\wedge R$	111	7	M_{111} 或 M_7

4.主析取范式：

定义 4：若干个不同的极小项的析取式，称为主析取范式

定理 5：任何一个命题公式均存在一个与之等值的主析取范式，

而且是唯一的。

例如：

$P\vee(\neg P\wedge Q)$，$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$ 是析取范式,但不是主析取范式。

$(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$ 是主析取范式，当然也是析取范式。

5．求主析取范式方法之一：真值表法

一个公式的主析取范式与该公式的真值是一一对应的

例如：由三个极小项组成的主析取范式

$(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)$

这三个极小项对应的赋值分别是 111，011，010，则该三个赋值使公式为真，而其它五个赋值使公式为假。

而反过来如果这三个赋值公式为真，而其它赋值使公式为假，则该公式的主析取范式就是有这三个赋值对应的极小值的析取而成。

因此我们可以用真值表的方法来求出公式的主析取范式。

例 4：用真值表的方法求 $\neg(P\wedge Q)$ 的主析取范式

解：$\neg$（P$\wedge$Q）的真值表

P	Q	P$\wedge$Q	$\neg$（P$\wedge$Q）
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

找使公式为真的赋值。

00 对应的极小项是$\neg$P$\wedge\neg$Q （m_0）

01 对应的极小项是$\neg$P$\wedge$Q （m_1）

10 对应的极小项是 P$\wedge\neg$Q （m_2）

则原公式的主析取范式是

$\neg$（P$\wedge$Q）$\Leftrightarrow$（$\neg$P$\wedge\neg$Q） $\vee$（$\neg$P$\wedge$Q）$\vee$（P$\wedge\neg$Q）

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2$

例 5：用真值表的方法求（P$\vee$Q）$\rightarrow$（Q$\leftrightarrow$R）的主析取范式。

解：（P$\vee$Q）$\rightarrow$（Q$\leftrightarrow$R）的真值表

P Q R	P$\vee$Q	Q$\leftrightarrow$R	（P$\vee$Q）$\rightarrow$（Q$\leftrightarrow$R）	对应极小项
0 0 0	0	1	1	$\neg$P$\wedge\neg$Q$\wedge\neg$R
0 0 1	0	0	1	$\neg$P$\wedge\neg$Q$\wedge$R
0 1 0	1	0	0	
0 1 1	1	1	1	$\neg$P$\wedge$Q$\wedge$R
1 0 0	1	1	1	P$\wedge\neg$Q$\wedge\neg$R
1 0 1	1	0	0	
1 1 0	1	0	0	
1 1 1	1	1	1	P$\wedge$Q$\wedge$R

找使公式真值为 1 的赋值。

由此主析取范式为：

（P$\vee$Q）$\rightarrow$（Q$\leftrightarrow$R）$\Leftrightarrow$（$\neg$P$\wedge\neg$Q$\wedge\neg$R）$\vee$（$\neg$P$\wedge\neg$Q$\wedge$R）$\vee$（$\neg$P$\wedge$Q$\wedge$R）

$\vee$（P$\wedge\neg$Q$\wedge\neg$R）$\vee$（P$\wedge$Q$\wedge$R）

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_7$

6.求主析取范式的方法之二：等值演算法

利用十六个命题公式、命题定理用等值演算的方法一步步将它化为主析取范式。

第一步：将公式化为析取范式，“消去”含有矛盾式的简单合取式，这是因为（$P\wedge\neg P\wedge Q$）$\vee G\Leftrightarrow G_0$，而 $P\wedge P$ 用 P 代替。

第二步：若析取范式中的简单合取式项不是极小项，即该项中缺命题变项，则添加（$P_i\vee\neg P_i$）再用分配律展开。

例如：公式中含 P、Q、R，某合取项为 $P\wedge\neg R$，缺 Q。

则 $P\wedge\neg R\Leftrightarrow P\wedge\neg R\wedge(Q\vee\neg Q)\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

第三步：用幂等律将重复的极小项删去，即 $m_i\vee m_i\Leftrightarrow m_I$ 然后将各极小项按顺序排列。

例 6：求（（$P\vee Q$）$\rightarrow R$）$\rightarrow P$ 的主析取范式。

解：原公式$\Leftrightarrow\neg(\neg(P\vee Q)\vee R)\vee P$

$\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge\neg R)\vee P$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg R)\vee(Q\wedge\neg R)\vee P$（析取范式）

$\Leftrightarrow P\vee(Q\wedge\neg R)$（析取范式）

$\Leftrightarrow(P\wedge(Q\vee\neg Q)\wedge(R\vee\neg R))\vee((Q\wedge\neg R)\wedge(P\vee\neg P))$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

$\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)$

（六个极小项，其中重复了一个）

$\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

$\vee$（$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$）

$\Leftrightarrow m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$

$\Leftrightarrow \Sigma(2,4,5,6,7)$