5、间接证法

1）　　CP 规则：

有时要证的结论以蕴含的形式出现。要证 $A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge Am\Rightarrow B\rightarrow C$。

如果把结论中的前件 B 作为附加条件加入前提集合中，即证出了

$A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge Am\wedge B\Rightarrow C$，则原来要证的结论成立。称之为附加前提证明法。

简称 CP 规则。

证明：$A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge Am\Rightarrow B\rightarrow C\Leftrightarrow A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge Am\wedge B\Rightarrow C$

证明：$A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge Am\Rightarrow B\rightarrow C\Leftrightarrow A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge Am\rightarrow (B\rightarrow C)$

$\Leftrightarrow\neg( A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge Am)\vee(\neg B\vee C)\Leftrightarrow( \neg( A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge Am)\vee \neg B)\vee C$

$\Leftrightarrow \neg( A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge Am\vee B)\vee C\Leftrightarrow( A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge Am\vee B) \rightarrow C$

∴CP 规则成立。

例 6：试证$(P\rightarrow(Q\rightarrow S))\wedge(\neg R\vee P)\wedge Q\Rightarrow R\rightarrow S$

前提公式集合 $P\rightarrow(Q\rightarrow S)$，$\neg R\vee P$，Q，结论 $R\rightarrow S$

将结论 $R\rightarrow S$ 中的前项 R 引入前提集合，而去演绎出 S。

证明：(1)$\neg R\vee P$ 规则 P

(2)R 规则 P (附加前提)

(3)P 规则 T 由(1) (2) (析取三段论)

(4) $P\rightarrow(Q\rightarrow S)$ 规则 P

(5)$Q\rightarrow S$ 规则 T 由(3) (4) (假言推理)

(6)Q 规则 P

(7)S 规则 T 由(5) (6) (假言推理)

(8) $R\rightarrow S$ 规则 CP

例：证明$\{\neg A\vee B，\neg B\vee C，C\rightarrow D\}$逻辑的推出 $A\rightarrow D$

证法 1：用 CP 规则

(1)$\neg A\vee B$ 规则 P

(2)A 规则 P (附加前提)

(3)B 规则 T 由(1) (2) (析取三段论)

(4) $\neg B\vee C$ 规则 P

(5)C 规则 T 由(3) (4) (析取三段论)

(6) $C\rightarrow D$ 规则 P

(7)D 规则 T 由(5) (6) (假言推理)

(8) $A\rightarrow D$ 规则 CP

证法 2：不用 CP 规则

(1)$\neg A\vee B$ 规则 P

(2)$A\rightarrow B$ 规则 T 由(1) (蕴含律)

(3) $\neg B\vee C$ 规则 P

(5)$A\rightarrow C$ 规则 T 由(2) (4) (假言三段论)

(4)$B\rightarrow C$ 规则 T 由(3) (蕴含律)

(6)$C\rightarrow D$ 规则 P

(7)$A\rightarrow D$ 规则 T 由(5) (6) (假言三段论)

2)归谬法

设 A1，A2，…，Am 是命题公式，

如果 $A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge Am$ 是可满足的，称 A1，A2，…，Am 是相容的。

如果 $A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge Am$ 是矛盾式，称 A1，A2，…，Am 是不相容的。

理论根据

$A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge Am\rightarrow C\Leftrightarrow\neg( A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge Am )\vee C\Leftrightarrow\neg( A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge Am\wedge\neg C)$

则 $A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge Am\Rightarrow C$，即 $A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge Am\rightarrow C$ 为重言式，$A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge Am\wedge\neg C$ 是矛盾式。

从而得到如 A1，A2，…，Am，¬C 不相容，则 C 是 A1，A2，…，Am 的有效结论。
因此我们可以把¬C 作为附加前提推出矛盾来，从而可以得到 C 是 A1，A2，…，Am 的有效结论。这种方法称为归谬法，也就是我们通常说的反证法。
例 7：是证明$(R\to\neg Q)\wedge(R\vee S)\wedge(S\to\neg Q)\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$
证明：(1) $P\to Q$ 规则 P
(2)P 规则 P (附加前提)
(3)Q 规则 T 由(1) (2) (假言推理)
(4) $R\to\neg Q$ 规则 P
(5)¬R 规则 T 由(3) (4) (拒取式)
(6) $S\to\neg Q$ 规则 P
(7)¬S 规则 T 由(3) (6) (拒取式)
(8) $\neg R\wedge\neg S$ 规则 T 由(4) (7) (合取引入)
(9)$\neg(R\vee S)$规则 T 由(8) (德.摩根律)
(10) $R\vee S$ 规则 P
(11) $\neg(R\vee S)\wedge(R\vee S)$规则 T 由(9) (10) (合取引入)
(12) $\neg(R\vee S)\wedge(R\vee S)$是矛盾式，所以 P 为前提公式的有效结论

§1.7

自我练习 1：求命题公式 $(P\wedge(P\to Q))\to R$ 的真值表

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

自我练习 2：
求$(P\to Q\wedge R)\wedge(\neg P\to\neg Q\wedge\neg R)$的主析取范式。
解：原公式$\Leftrightarrow(\neg P\vee(Q\wedge R))\wedge(P\vee(\neg Q\wedge\neg R))$
$\Leftrightarrow(\neg P\wedge P)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(Q\wedge R\wedge P)\vee(Q\wedge R\wedge\neg Q\wedge\neg R)$
$\Leftrightarrow 0\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee 0$
$\Leftrightarrow 0\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\Leftrightarrow m0\vee m7\Leftrightarrow\sum(0,7)$
自我练习 3：
$((A\wedge B)\to C)\wedge(B\to(D\vee C))\Leftrightarrow(B\wedge(D\to A))\to C$
证明：左边$\Leftrightarrow(\neg(A\wedge B)\vee C)\wedge(\neg B\vee(D\vee C))\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B\vee C)\wedge(\neg B\vee C\vee D)$
右边$\Leftrightarrow\neg(B\wedge(\neg D\vee A))\vee C\Leftrightarrow(\neg B\vee(D\wedge\neg A))\vee C\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B\vee C)\wedge(\neg B\vee C\vee D)$
所以左边$\Leftrightarrow$右边
自我练习 4：构造下面推理证明

前提：$\neg(P\wedge\neg Q),\neg Q\vee R,\neg R$
结论：$\neg P$
证明：
(1) $\neg Q\vee R$ 规则 P
(2)$\neg R$ 规则 P
(3)$\neg Q$ 规则 T 由(1)(2)(析取三段论)
(4)$\neg(P\wedge\neg Q)$规则 P
(5)$\neg P\vee Q$ 规则 T 由(3)(德.摩根律)
(6)$\neg P$ 规则 T 由(3)(5)(析取三段论)

作业：
P32 练习 1.5:(A)1,3,5(B)1,2,3
P35 习题 1: 8(2)(3)(4)(5)