# 前言

课程性质：计算机数学基础

课程安排：三个学期教授三个部分

- 第一部分：离散数学
  - 第一篇：数理逻辑
  - 第二篇：集合论
  - 第三篇：图论 代数系统
- 第二部分：计算数学
- 第三部分：组合数学

学习目的：1、初步掌握现代数学的观点和方法；

2、初步掌握处理离散结构和方法，提高计算机系统设计和程序设计的逻辑数字的能力；

3、初步掌握计算机在进行数的处理时的方法和计算；

4、培养学习抽象思维和缜密思考的能力；

## 第一篇　数理逻辑

## 第一章　命题逻辑

### §1.1　命题和命题联结词

一.命题：

定义：具有确定真值的表达判断的陈述句称为命题。

**说明：**⑴命题的真值：作为命题所表达的判断只有两个结果：正确和错误，此结果称为命题的真值。

命题是正确的，称此命题的真值为真；命题是错误的，称此命题的真值为假。

真值为真的命题称为真命题 ；真值为假的命题称为假命题。

⑵其它类型的句子，如疑问句、祈使句、感叹句均没有真假意义，因为均不是命题。

**在数理逻辑中，命题的真值的真和假，有时分别用 1 和 0 来表达，也有时分别用 T 和 F 来表达。**

命题的分类：

**原子命题**：不能分解成更简单的命题的命题。

**复合命题**：由若干个原子命题用命题联结词、标点符号联结起来的命题。

例：

（1）10 是整数。　　真　　原子命题

（2）北京是我们祖国的首都。　　真　　原子命题

（3）雪是黑的。　　假　　原子命题

（4）煤是白的。　　假　　原子命题

（5）今天是 7 号。　在一定条件下是真命题（如果今天是 7 号）。

（6）1+11=100。　　在一定条件下是真命题（在二进制中）。

（7）我学英语，或者学法文。　　复合命题

（8）如果 天气好，我就去游泳。　复合命题

（9）向右看齐！　祈使句　非命题

（10）请勿吸烟！　祈使句　非命题

（11）你吃饭了吗？疑问句　非命题

（12）你上网了吗？疑问句　非命题

（13）本命题是假的。悖论

（14）我正在说谎。　悖论

（15）我不给所有自己给自己理发的人理发，但是却会给所有自己不给自己理发的人理发。悖论

**命题标识符**：用大写字母 P、Q、R、$P_1$、$P_2$ **L** 来表示命题，这些大写字母称为命题标识符。

**命题常量**：用命题标识符表示的确定的命题称为命题常量，它有确定的真值。

**命题变量**：表示任何一个命题的标识符，称为命题变量，它有不确定的真值。

**二．命题联结词：**

常见联结词

否定、合取、析取、蕴含、等价和异或

**1. 否定**　符号：¬

P 是命题，¬P 读作“非 P”。

¬P 真值表为

| P | ¬P |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

**否定的性质**

**双重否定律 ：**　　¬（¬P）⇔ P

**说明：1、**¬P 是一元联结词

**所谓**一元联结词就是联结一个命题的联结词。

**2、**⇔念作“等值”，表示该符号两边的两个命题在任何情况下真值相同。

**2. 合取**　**符号：**∧

P、Q 是命题

P∧Q　读作“P 且 Q”，“P 合取 Q”。

P∧Q　真值表

| P | Q | P ∧ Q |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

例：P：今天下雨。Q:今天刮风。则 P∧Q　：今天下雨且刮风。

**合取的性质**

1) 幂等律　　P∧P⇔P

2) 交换律　　P∧Q⇔Q∧P

3) 结合律　　(P∧Q)∧C⇔P∧(Q∧C)

4) 零一律　　P∧0 ⇔ 0

5) 同一律 $P \wedge 1 \Leftrightarrow P$

6) 否定律 $P \wedge \neg P \Leftrightarrow 0$

**3. 析取 符号：** $\vee$

P、Q 是命题,记作 $P \vee Q$ ，读作“P 或 Q”,“P 析取 Q”。

$P \vee Q$ 真值表

| P | Q | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

例：P：今天下雨。Q:今天刮风。则 $P \vee Q$ ：今天下雨或刮风。

**析取的性质：**

1) 幂等律 $P \vee P \Leftrightarrow P$
2) 交换律 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
3) 结合律 $(P \vee Q) \vee C \Leftrightarrow P \vee (Q \vee C)$
4) 同一律 $P \vee 0 \Leftrightarrow P$
5) 零一律 $P \vee 1 \Leftrightarrow 1$
6) 否定律 $P \vee \neg P \Leftrightarrow 0$
7) 吸收律 $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$, $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
8) 分配律 $P \vee (Q \wedge C) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee C)$ $P \wedge (Q \vee C) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge C)$
9) 德、摩根律 $\neg (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$, $\neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

说明：（1）$\vee$ 和 $\wedge$ 混合运算只能用分配律，不能用结合律。例：$P \vee (P \wedge Q)$与 $P \wedge (Q \vee C)$ 不等值。

（2）$\vee$ 和 $\wedge$ 的分配律：$P \wedge (Q \vee C) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge C)$，形如乘与加的分配律 $P \times (Q+C)$。

（3）可兼或与不可兼或

可兼或：明天下雨或刮风。

不可兼或：今天晚上去电影院看电影，或在家看电视。

**4.蕴含** 符号：$\rightarrow$

P、Q 是命题

$P \rightarrow Q$ 读作“P 蕴含 Q”,“如果 P 则 Q”,“当 P,则 Q”,“P 是 Q 的充分条件”。

例：P:我去上海。 Q:我给你买衣服。

$P \rightarrow Q$：如果我去上海，就给你买衣服。

P 假 Q 假 我没去上海，也没给你买衣服。 $P \rightarrow Q$ 真

P 假 Q 真 我没去上海，但没给你买衣服。 $P \rightarrow Q$ 真

P 真 Q 假 我去了上海，但没给你买衣服。 $P \rightarrow Q$ 假

P 真 Q 真 我没去上海，也没给你买衣服。 $P \rightarrow Q$ 真

$P \rightarrow Q$ 真值表

| P | Q | $P \rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

P 也称为前件；Q 称为后件。

前件为假时，$P \to Q$ 必为真；

后件为真时，$P \to Q$ 必为真。

**蕴含的性质**

1) 归化：$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ 所谓归化就是用$\vee$、$\wedge$、$\neg$表示其它联结词。

2) $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$

证明：

| P Q | $\neg P$ | $\neg Q \to \neg P$ | $P \to Q$ |
|---|---|---|---|
| 0 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 1 | 0 | 1 | 1 |

在全部四种情况下，$P \to Q$ 与 $\neg Q \to \neg P$ 的真值表相同，所以 $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$

3) $\neg(P \to Q) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

例：将下列命题符号化

1) 如果 1+2＝3,则太阳从东边升起 $P \to Q$

2) 如果 1+2≠3,则太阳从东边升起 $\neg P \to Q$

3) 如果 1+2＝3,则太阳从东边升起 $P \to \neg Q$

4) 如果 1+2≠3,则太阳从东边升起 $\neg P \to \neg Q$

P:1+2=3

Q:表示太阳从东边升起

说明(1)蕴涵不存在交换律、结合律

$P \to Q$ 与 $Q \to P$ 不等值

$(P \to Q) \to R$ 与 $P \to (Q \to P)$ 等值

(2)在数理逻辑中，即使

P、Q 没有内在联系 $P \to Q$ 仍有意义

**5. 等价 符号：$\leftrightarrow$**

P、Q 是命题

从 读作“P 等价于 Q”，“ P 当且仅当 Q”，“P 是 Q 的充要条件”。

$P \leftrightarrow Q$ 真值表

| P Q | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|
| 0 0 | 1 |
| 0 1 | 0 |
| 1 0 | 0 |
| 1 1 | 1 |

等价的性质 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$从

$(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q$

1) 交换律：$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow Q \leftrightarrow P$

2) 结合律：$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R \Leftrightarrow P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$

3) $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

4) 归化：$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

证明结合律

| PQR | $P \to Q$ | $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R$ | $Q \leftrightarrow R$ | $P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$ |
|---|---|---|---|---|
| 000 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 001 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 010 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 011 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 100 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 101 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 110 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 111 | 1 | 1 | 1 | 1 |

左右两边在全部八种情况下均相等，所以两边等值，$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R \Leftrightarrow P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$。

说明：

1) $\leftrightarrow$ 是逻辑联结词，而 $\Leftrightarrow$ 是公式关系符。A、B 是命题，$A \leftrightarrow B$ 仍是命题，而 $A \Leftrightarrow B$ 不是命题。

2) P、Q 两命题，没有内在联系　　$P \leftrightarrow Q$ 仍有意义。

例：2+2=5 的充要条件是太阳从西边升起。　　真

该命题为真