五、关系的闭包

定义 14 R 是非空集合 A 上的关系,若 A 另外有一个关系 R'满足如下三条,

(1) R'是自反的(对称的,传递的)

(2) RÍR'

(3) 对 A 上任何一个满足以上两条的关系 R',均有 R'Í R" 则称关系 R'为 R 的自反(对称,传递)闭包,

记作 r(R),(s(R),t(R))。

解释定义:

(1) 由(2)知,R'是在 R 的基础上添加元素(有序对)

(2) 由(1)知,R 添加元素其目标是使 R'具有自反性(对称性,传递性)

(3) 由(3)知,在添加后使之具有自反性的所有关系中 R'是最小的一个,即要在保证其具有自反性的前提下,要尽量少添加元素.没必要的元素就不要加入。 05:44

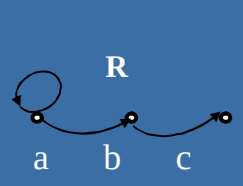
例 6.设集合 A={a,b,c},A 上的关系 R={<a,a>,<a,b>,<b,c>}则

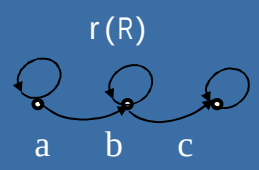
自反闭包 r(R)={<a,a>,<a,b>,<b,c>,<b,b>,<c,c>}

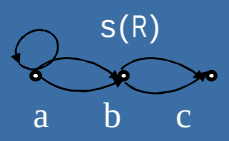
对称闭包 s(R)={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,b>}

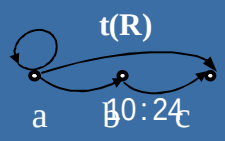
传递闭包 t(R)={<a,a>,<a,b>,<b,c>,<a,c>}

关系图作法如下:









10:24

从关系图中可以看到

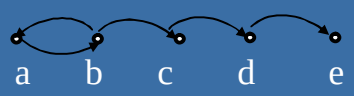
(1)　在 R 的基础上添加自回路,使得每点均有自回路。

(2)　s(R)是在 R 中两点间只有一条弧的情况下,再添一条反向弧,使两点间或是 0 条弧,或是两条弧,原来两点间没有弧不能添加。

(3)　t(R)是在 R 中如结点 a 通过有向路能通到 x,则添加一条从 a 到 x 的有向弧.其中包括如 a 能达到自身,则必须添从 a 到 a 的自回路。

12：40

例:R={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,e>}



a 能到达 a,c,d,e,则要加<a,a>,<a,c>,<a,d>,<a,e>

b 能到达 b,d,e,则要加<b,b>,<b,d>,<b,e>

c 能到达 e,则要加<c,e>，这些加入后 才成为 t(R)　15：03

定理 11　设 R 是非空集 A 的关系,则

(1)R 是自反的充要条件是 R=r(R)

(2)R 是对称的充要条件是 R=s(R)

(3)R 是传递的充要条件是 R=t(R)　16：59

定理 12 设 R 是非空集 A 的关系,则 r(R)=RÈI_A

证明:RÍRÈI_A ， RÈI_A是自反的.定义中的前两条满足了.设 R"满足 RÍR",R"是自反的,"<a,b>ÎRÈI_A

则<a,b>ÎR 或<a,b>ÎI_A　如果<a,b>ÎR 则由 RÍR"

则<a,b>Î R”如<a,b>Î I_A 则必有 a=b,即<a,a>Î I_A 由 R”的自反性,则<a,b>ÎR”,总之均有<a,b>ÎR”\RÈI_A ÍR”,满足定义第三条, \r(R)=RÈI_A

注:对关系矩阵而言,如 **Mr** 为 r(R)的关系矩阵,则 **Mr= M_R+**I,其中I是单位矩阵.即只要在 **M_R** 的对角元上加 1。(注意:1+1=1)

22：48

定理 13:设 R 是非空集 A 的关系,则 s(R)=RÈR^{-1}

证明:显然 RÍRÈR^{-1}满足定义第 1 条

"<a,b>ÎRÈR^{-1}Û<a,b>ÎRÚ<a,b>Î R^{-1}

Û<b,a>Î R^{-1}Ú<b,a>Î RÛ<b,a>Î RÈR^{-1}

\RÈR^{-1}是对称的,满足定义的第 2 条

如 RÍR”,且 R”是对称的, "<a,b>ÎRÈR^{-1}

则<a,b>ÎR 或<a,b>ÎR^{-1}

如<a,b>ÎR,则由 RÍR”,则<a,b>ÎR”

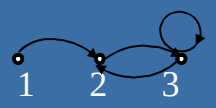
如<a,b>ÎR^{-1}则<b,a>ÎR 则<b,a>ÎR”

又因 R”对称\<a,b>ÎR”, \RÈR^{-1}ÍR”

则满足定义第三条,则 s(R)= RÈR^{-1} 28：10

例 7:设 A={1,2,3},A 上的关系 R 的关系图如图,

写出关系 R 和关系矩阵 **M_R**,并求 r(R),s(R),t(R)



解:R={<1,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>}

r(R)={<1,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>,<2,2>,<1,1>}

s(R)={<1,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>,<2,1>}

t(R)=RÈ{<1,3>,<2,2>} 30：42

<u>定理 14</u>:设 R 是非空集合 A 上的关系,

则 t(R)= $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$=RÈ$R^2$È…

推论：设 A 是非空有限集，|A|=n，

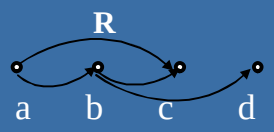
则 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup \ldots R^n$

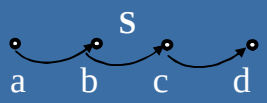
说明：R^k 的每条弧就是在 R 中，任何一点 x,经过 k 条弧组成的有向路到达 y，则<x,y>∈ R^k 而传递闭包 t(R)就是在 R 中如点 x 经过任何条弧能到达 y，则 x 到 y 应直接有一条有向弧。故定理 14,就是 t(R)要在 R 的基础上并上 R^2,R^3，…，而如 A 是有限集|A|=n，如在 x 点有超过 n 步能达到 y 点，则必有一条更短的有向路，至多 n 步可以到达 y，所以得到结论。35：17

例 8 A={a,b,c,d},R={<a,b>,<a,c>,<b,c>,<b,d>}

S={<a,b>,<b,c>,<c,d>},求 t(R),t(S)

解:





R^2={<a,c>,<a,d>},R^3=R^4=Æ， \t(R)=R∪{<a,d>}

S^2={<a,c>,<b,d>}S^3={<a,d>}S^4=Æ,

\t(S)=S∪{<a,c>,<b,d>,<a,d>}　　38:40

例 10,设 R 是非空集合 A 上的对称关系,

则 r(R),t(R)也是对称关系

证明:(1)r(R)=R∪I_A,因 R,I_A均是对称的,故 r(R)=R∪I_A也是对称的

(2)先证对一切 i,R^i是对称的,用归纳法证明,i=1 时 R 是对称的,设 R^k是对称的,对 i=k+1,"<a,b>∈R^{k+1}

$x∈A,<a,x>∈$ R^k,<x,b>∈R,由 R^k,R 的对称性,<b,x>∈R <x,a>∈ R^k \<b,a>∈R· R^k=R^{k+1}

\$R^{k+1}$是对称的

"<a,b>∈ $t(R)= \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

存在 i 使<a,b>∈ R^i 因 R^i是对称的,

\<b,a>ÎR¹ Í t(R) \t(R)是对称的 44:08

例:设 R 是传递的,则 r(R)也是传递的,但 s(R)未必是传递的

证明:"<a,b>,<b,c>Î r(R)=RÈI_A,<a,b>,<b,c>中有属于I_A,

如<a,b>ÎI_A则 a=b,则<a,c>=<b,c>Î r(R)

如 a,b,c 均不等,则只有<a,b>,<b,c>ÎR,因 R 是传递的，则

<a,c>ÎRÍ r(R),则 r(R)也是传递的

举反例:R={<a,b>,<c,b>}R 是传递的

但 s(R)={<a,b>,<b,a>,<c,b>,<b,c>}则 s(R)不是传递的,要补

上<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,c>,<c,a>才是传递的。 48:36

作业：

P97 练习 4.1(A):1,2(2)(3)(4),3(2),4(2),5(2)

练习 4.1(B):1,3,4

P105 练习 4.2(A):1,3,4,5

(B):2,3,4

P115 练习 4.3(A):1,2,4,5(3)(4)

(B):1,2

P152 习题 4 1,2,4 51:00