例 17:已知 $A\cup B=A\cup C$,$A\cap B=A\cap C$,求证 $B=C$

证明:$B=B\cap(A\cup B)$ (吸收律)

$=B\cap(A\cup C)$ (等量代入)

$=(B\cap A)\cup(B\cap C)$(分配律)

$=(A\cap C)\cup(B\cap C)$(等量代入)

$=(A\cup B)\cap C$(分配律)

$=(A\cup C)\cap C$(等量代入)

$=C$ (吸收律)

说明:$A\cup B=A\cup C\Rightarrow B=C$

$A\cap B=A\cap C\Rightarrow B=C$

两种推理均是不成立的。 4:15

例:求证:$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$的充要条件是 $C\subseteq A$。

证明:充分性因 $C\subseteq A$,$\therefore A\cup C=A$

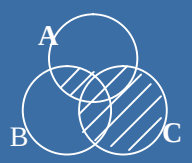
$\therefore(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$(分配律)

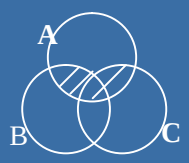
$=A\cap(B\cup C)$(等量代换)

必要性$\underline{\forall x\in C}\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup C$,$\because(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$

$\therefore x\in A\cap(B\cup C)$ $\therefore x\in A$ $\therefore C\subseteq A$。 7:29

说明:一般情况$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$是不成立的。成立是有条件的,即“交并混合运算不成立结合律”。





$(A\cap B)\cup C$ $A\cap(B\cup C)$

从中看出两集合是不相等的。 9:41

例 19:试证:$(A\cup B)—(A\cap B)=(A-B)\cup(B—A)$

证明:左边$=(A\cup B)\cap\sim(A\cap B)$

$=(A\cup B)\cap(\sim A\cup\sim B)$(德摩根律)

$=(A\cap\sim A)\cup(A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A)\cup(B\cap\sim B)$(分配律)

$=\varnothing\cup(A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A)\cup\varnothing$(互补律)

$=(A-B)\cup(B-A)$ 11:56

例 20:化简$((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)$

证明:原集合$=(A\cup B)-A$(吸收律)

$=(A\cup B)\cap\sim A$

$=(A\cap\sim A)\cup(B\cap\sim A)$(分配律)

$=\varnothing\cup(B\cap\sim A)$ (互补律)

$=B\cap\sim A$ (同一律) 13:57

关于对称差的一些性质:

11、交换律 $A\oplus B=B\oplus A$

12、结合律$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

13、$\cap$对$\oplus$的分配律:$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)$Å $(A\cap C)$

14、同一律 $A\oplus\varnothing=A$

15、零律 $A\oplus A=\varnothing$

16、$A\oplus(A\oplus B)=B$

说明:16 可以由 12、14、15 立即得出

$A\oplus(A\oplus B)=(A\oplus A)\oplus B=\varnothing\oplus B=B$ 16:25

证明结合律:$(A\oplus B)\oplus C=((A\oplus B)-C)\cup(C-A\oplus B))$

$((A-B)\cup(B-A))\cap\sim C)\cup(C\cap\sim((A\cup B)-(A\cap B)))$

$=(((A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A))\cap\sim C)\cup(C\cap\sim((A\cup B)\cap\sim(A\cap B)))$

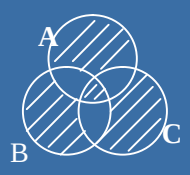
$=(A\cap\sim B\cap\sim C)\cup(\sim A\cap B\cap\sim C)\cup(C\cap\sim((A\cup B)\cap(\sim A\cup\sim B))$

$=(A\cap\sim B\cap\sim C)\cup(\sim A\cap B\cap\sim C)\cup(C\cap((\sim A\cap\sim B)\cup(A\cap B)$

$=(A\cap\sim B\cap\sim C)\cup(\sim A\cap B\cap\sim C)\cup(C\cap\sim A\cap\sim B)\cup(A\cap B\cap C)$

其结果关于 A,B,C 是对称的。

$\therefore(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$ 21:26



注:$\cup$对$\oplus$的分配规律不成立。

即 $A\cup(B\oplus C)\neq(A\cup B)\oplus(A\cup C)$

仅成立$(A\cup B)\oplus(A\cup C)\subseteq A\cup(B\oplus C)$

$\oplus$对$\cap$,$\oplus$对$\cup$的分配律也不成立。

仅有$(A\oplus B)\cap(A\oplus C)\subseteq A\oplus(B\cap C)$

$A\oplus(B\cup C)\subseteq(A\oplus B)\cup(A\oplus C)$ 24:05

三、有限集合的计数:

定理 2

(1)$\max(|A|,|B|)\leq|A\cup B|\leq|A|+|B|$

(2)$|A\cap B|\leq\min(|A|,|B|)$

(3)$|A|-|B|\leq|A-B|\leq|A|$

(4)$|A\oplus B|=|A|+|B|-2|A\cap B|$

定理:若 A,B 不相交,则$|A\cup B|=|A|+|B|$

说明:(1)当 $B\subseteq A$ 时,$|A\cup B|=|A|$

当 $A\cap B=\varnothing$ $|A\cup B|=|A|+|B|$

(2)当 $B\subseteq A$ 时$|A\cap B|=|B|\leq|A|$

当 $A\cap B=\varnothing$时$|A\cap B|=0$

(3)当 $B\subseteq A$ 时$|A-B|=|A|-|B|$

当 $A\cap B=\varnothing$时,$|A-B|=|A|$ 28:39

定理 3(包含排斥定理)

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

证明:$A=A\cap(B\cup\sim B)=(A\cap B)\cup(A\cap\sim B)$

而$(A\cap B)\cap(A\cap\sim B)=\varnothing$

$\therefore|A|=|A\cap B|+|A\cap\sim B|$

$\therefore|A\cap\sim B|=|A|-|A\cap B|$ (1)

而$(A\cap\sim B)\cup B=A\cup B$;$(A\cap\sim B)\cap B=\varnothing$

$\therefore|A\cup B|=|A\cap\sim B|+|B|$

将(1)式代入$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

从图中可以理解包含排斥定理。

33:41

例 21:在 20 名青年有 10 名是公司职员,12 名是学生,其中 5 名既是职员又是学生,问有几名既不是职员,又不是学生。

解:设职员和学生的集合分别是 A 和 B。

由已知条件$|A|=10$,$|B|=12$,$|A\cap B|=5$

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=10+12-5=17$

则$|\sim(A\cup B)|=|E|-|A\cup B|=20-17=3$

∴有 3 名既不是职员又不是学生。 36:13

三个集合的包含排斥定理

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

例 22:求 1 到 500 之间能被 2,3,7 任一数整除的整数个数。

解:设 1 到 500 间分别能被 2,3,7 整除的整数集合为 A,B,C

$|A|=[500/2]=250$(注[x]表示不大于 x 的最大整数)

$|B|=[500/3]=166$;$|C|=[500/7]=75$;

$|A\cap B|=[500/(2*3)]=83$;$|A\cap C|=[500/(2*7)]=35$;

$|B\cap C|=[500/(3*7]]=23$;$|A\cap B\cap C|=[500/(2*3*7)]=11$

∴$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

$=250+166+71-83-35=23+11=357$ 42:11

包含排斥定理的推广:对于 4 个集合 A_1,A_2,A_1,A_4。

$|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|=|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_1\cap A_4|-|A_2\cap A_3|-|A_2\cap A_4|-|A_3\cap A_4|+|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|+|A_1\cap A_3\cap A_4|+|A_2\cap A_3\cap A_4|-|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|$

推广到 n 个集合的包含排斥定理。

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$
$$+\ldots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

44:20

§3.3 笛卡尔积

一、有序对:

定义 10:有两个元素 x,y(允许 x=y)按给定顺序排列组成的二元组合称为一个有序对,记作<x,y>其中 x 是它的第一元素,y 是它的第二元素。

例,平面直角坐标系中的一个点的坐标就构成为一个有序实数对,我们可用<x,y>表示。

注:有序对是讲究次序的,例<1,3>和<3,1>是表示平面上两个不同的点,这与集合不同,{1,3}和{3,1}是两个相等的集合。从而有两个性质。

性质 1:如 x≠y 即<x,y>≠<y ,x>。

性质 2:<x,y>=<a,b>的充要条件是 x=a,y=b.　　47:27

定义 11:由 n 个元素 $x_1,x_2\cdots x_n$ 按给定顺序排列组成的 n 元组合称为一个 n 元有序组,记作<$x_1\cdots x_n$>,其中 xi 称为它的第 i 元素,i=1,…n。

同样<$x_1\cdots x_n$>=<$y_1\cdots y_n$>的充要条件是 $x_i=y_i$,i=1,…n。

48：57

作业布置:

P67 练习 3.1 (A) 1(3)(5),2(3)(4),

3,4,5,6(3)(4)

(B) 1(3),2(2)(4)(5),3,4

P77 练习 3.2 (A)2,3,4(2)(5)(8)(9)(10)

5(3)(4)(5) 6,8(3)(4),9(2)(3),10(2),12

(B)4,5

习题 3　3,4,6(1)(2)(4),7,9