三、换名规则

从以上例子中可以看出,在谓词公式中一个变元可能既是约束出现,同时又有自由出现,则该变元既是自由变元又是约束变元,本质上这两种出现,用的是一个符号,实质上是不同的含义。为避免混淆,需要改名。改名要采用以下规则,使谓词公式的含义不改变。

2：15

1、 换名规则：对约束变元进行换名。

将量词辖域内出现的某个约束变元及其相应量词中的指导变元,可以换成一个其他变元,改变元不能与本辖域内的其他变元同名,公式中的其他部分不改变。

2、 代入规则：对自由变元进行代入。

整个谓词公式中同一个字母的自由变元是指同一个个体名词。因此可以用整个公式中所有变元的符号来代替,且要求整个公式中该变元同时用同一个符号代替。

4：35

例：(1) $"\mathbf{x}\mathbf{F}(x,y)\wedge\exists x\mathbf{G}(x,y)$

x 是约束变元,y 是自由变元。而 x 的两次出现尽管均是约束的,但分别在不同的辖域。含义是互相无关的。可以将一处换名,但不能与 y 同名。

改为 $"\mathbf{x}\mathbf{F}(x,y)\wedge\exists u\mathbf{G}(u,y)$

(2) $"\mathbf{x}(\mathbf{F}(x,y)\rightarrow P(x))\wedge\exists y(Q(x,y)\rightarrow R(x)$

x 前两次出现是约束的,后两次出现是自由的。y 第一次出现是自由的,第二次是约束的,准备将自由变元 x 改为 u,自由变元 y 改为 v,成为

$"\mathbf{x}(\mathbf{F}(x,v)\rightarrow P(x))\wedge\exists y(Q(u,y)\rightarrow R(u))$ 11：04

说明：(1)如果 D 是有限集,谓词公式中的量词可以用逻辑联结词来解释。

例 D={a,b,c}

$"\mathbf{x}\mathbf{P}(x)$ Û $\mathbf{P}(a)\wedge\mathbf{P}(b)\wedge\mathbf{P}(c)$

Ø$\exists x\,\mathbf{P}(x)$ Û $\mathbf{P}(a)$ Ú$\mathbf{P}(b)$ Ú$\mathbf{P}(c)$

(2)量词不能随便换顺序。对于"和∃这两个量词交换位置,其意义不同了,相应真值也可能改变。

例：D：自然数全体,G(x,y)：x 小于 y。

$"\mathbf{x}\exists y\mathbf{G}(x,y)$表示任意一个自然数 x,总存在自然数 y,使得 x 小于 y,该命题是真的。

$"\mathbf{y}\exists x\mathbf{G}(x,y)$表示存在一个自然数 y,使得对一切自然数 x,使 x 小于 y,即 y 是最大的自然数。该命题是假的。 14：55

§2.3 谓词的等值演算

一、 谓词逻辑中的解释(赋值)

在命题逻辑对每个命题符号作个真值指定可以得一个公式的一个指派,又称赋值,又称解释。如公式中共出现 n 个不同的命题符号,则共有 2^n 个解释,因而可以列出公式的真值表。而谓词逻辑中公式的赋值解释是怎样的呢?

16：33

1.谓词公式的赋值(解释)

定义 6：谓词公式的赋值是对以下一些符号进行指定：谓词公式 A 的个体域为 D(这也必须指定)

（1） 每一个个体常项指定 D 中的一个元素

（2） 每一个 n 元函数 D^n 到 D 的一个映射

（3） 每一个 n 元谓词 $\mathbf{D}^n$ 到{0,1}的一个映射

以上一组指定称为谓词公式 A 的一个解释或赋值 19:16

例 1：已知一个解释 I 如下：

1)D_x={2,3} 2)指定 a=2∈D

3)函数 f：D→D 指定 f(2)=3,f(3)=2

4)谓词 P：D→{0,1}指定 P(2)=0,P(3)=1。

Q：$\mathbf{D}^2\rightarrow\{0,1\}$,Q(i,j)=1,i,j=2,3

在该解释 I 下

$\forall x(P(x) \wedge Q(x,y)) \Leftrightarrow (P(2) \wedge Q(2,2)) \wedge (P(3) \wedge Q(3,2)) \Leftrightarrow (0\wedge 1) \wedge (1\wedge 1) \Leftrightarrow 0$

公式$\exists x(P(f(x)) \wedge Q(x,f(a)) \Leftrightarrow (P(f(2)) \wedge Q(2,f(2)) \vee (P(f(3)) \wedge Q(3,f(2)) \Leftrightarrow (P(3) \wedge Q(2,3)) \vee (P(2) \wedge Q(3,3) \Leftrightarrow (1\wedge 1) \Leftrightarrow 1$ 25:25

例 2：已知指定一个解释 N 如下：

(1)个体域为自然数集合 D_N

(2)指定常项 a=0

(3)D_N上的指定函数 f(x,y)=x+y,g(x,y)=x*y

(4)指定谓词 F(x,y)为 x=y

在以上指定的解释 N 下,说明下列公式的真值 (1)$\forall xF(g(x,a),x)$即 $\forall x(x*0=x)$该命题假的

(2)$\forall x\exists y(F(f(x,a),y)\rightarrow F(f(y,a),x))$

在解释 N 下此公式：$\Leftrightarrow \forall x\exists y(x+0=y\rightarrow y+0=x)$此命题为真

(3)$F(f(x,y),f(y,z))$在解释 N 下该公式$\Leftrightarrow x+y=y+z$

此时,x,y,z 均为自由变元,解释不对自由变元进行指定。因而该公式是命题函数,不是命题,真值不能确定。 34：23

说明:

(1) 一个谓词公式如果不含自由变元,则在一个解释下,可以得到确定的诊治,不同的解释下可能得到不同的真值。

(2) 公式的解释并不对变元进行指定,如果公式中含有自由变元,即使对公式进行了一个指派,也得不到确定的真值,其仅是个命题函数,但约束变元不受此限制。

(3) 有公式的解释定义可以看出,公式的解释有许多的解释,当 D 为无限集时,公式有无限多个解释,根本不可能将其一一列出,因而谓词逻辑的公式不可能有真值表可列。 38：50

2.永真式和永假式

定义 7：设 A 为一个谓词公式,如果 A 在任何解释下均为真,称 A 为逻辑有效式(或称永真式)；如果 A 在任何解释下均为假,称 A 为矛盾式(或称永假式)；

如果存在一个解释使 A 为真,则称 A 为可满足式；

例如： $\neg P(x)\vee P(x)$是永真式

$\neg P(x)\wedge P(x)$是永假式 43:33

作业布置：

P14 练习 2.1(A)1(2)(3),2(1),(B)1,2,4

P44 练习 2.2(A),(B)2,5 47:28

例 3 将下列语句表示为谓词逻辑的命题。

（1） 所有的正数均可开方。

解：（i）若个体域为全体正实数 R+，S（X）：X 可以开方，则命题符号化为："xS（x）

（ii）若个体域为全体实数集 R，G（x，y）：x>y，则命题符号化为：∀x((G(x，0）→ S(x))

(iii)若 D，全总个体域,R(x):x 是实数，则符号化为：∀ x(R(x)∧G(x，0）→ S(x))

4:03

(2)没有最大的自然数

即理解为“对所有 x，若 x 是自然数，则存在 y，y 也是自然数，且 y>x”

解：N(x):x 是自然数，G(x,y):x>y,符号化为：∀x(N(x）→∃y(N(y) ∧G(y,x))

也可以理解为“下句话是不对的‘存在一个 x，x 是自然数且对一切自然数 y，x 均大于 y’”，

符号化为：¬$x(N(x) ∧∀y(N(y）→G(x,y))

以后可以证明，这两个公式是等值的。 8：15

注：不可以用最大来直接定义谓词。

设 B(x):x 是最大的，N(x):x 是自然数。

以上命题可以表示为：¬∃x(B(x) ∧N(x))

这是不对的。“最大”是比较而来，依赖于其它客体，最大最小不能直接作谓词。

10：08

§2.2 谓词公式

一、 谓词公式的定义：

1.谓词公式中出现的字母表：

定义 1：字母表如下：

(1)个体常量:a,b,c,...,a1,a2,a3,...

(2)个体变量:x,y,z,...,x1,x2,x3,...

(3)函数符号:f,g,h,...,f1,f2,f3,...

(4)谓词符号:P,Q,R,...,S0,S1,S2,...

(5)量词符号:∀,∃

(6)逻辑符号:¬,∧,∨,→,↔,∇

(7)括号和逗号:(,), 15:10:30

2.项的定义：

项在谓词公式中起的是名词的作用，它不是句子。

定义 2：项的递归定义如下：

(1)任意个体常量或个体变量是项。

(2)如果 f(X1,X2,X3,...,Xn)是任意 n 元函数，t1,t2,...tn 是项，则 f(t1,t2,...,tn)仍然是项。

(3) 只有有限次使用(1) ,(2)生成的符号串才是项。 19：10

例：D 是个体名称集，x Î D，人名变量，a：张三，b：李四。

x,a,b 是项，

f(x):x 的父亲,S(x,y),x 和 y 的儿子。

f(a)：张三的父亲,仍然是个名词，不是句子，它仍是项。

f(f(a))：张三的祖父，

而 P(x,y):x 是 y 的父亲，是句子而不是名词。其是命题函数，而不是项了。

23：17

例：D：是实数集的全体。

f（x）=lnx，g（x，y）=x+y，h（x，y）=x*y

其均是函数，算术表达式，其结果仍是数，仍可以在函数的自变量位置上出现。

g（g（x，y），h（x，y））=((x+y)+(x*y))

f(g(x,y))= ln(x+y)

x+y=5,x*y+a>5,此类是逻辑表达式，其结果不是数了，是成立或不成立，是真或假,因而不是项。 26：51

3．原子公式的定义

原子公式是公式的最小单位，最小的句子单位。项不是公式。

定义 3：若 P(x1,...,xn)是 n 元谓词，t1,...，tn 是项，则 P(t1,...，tn)为原子公式。

（1）从中可以看出，项也可以出现在谓词的变量位置，相当于名词，可以做句子的主语或宾语。

（2）函数 f(t1,...，tn)不是句子，仅是词，因而不是公式仅是项。项的结果仍是个体名称集中的名词，而公式的结果（真值）是成立或不成立（是 1 或 0）。30：37

4．谓词公式的定义：

定义 4：合式公式的递归定义如下：

（1）原子公式是合式公式；

（2）如 A，B 是公式，则¬A,A∧B,A∨B,A→B,A↔B,A∇B 也是公式；

（3）如 A 是公式，x 是 A 中出现的任意有关变元，则∀xA,∃xA 也是合式公式。

（4）只有有限次使用（1）（2）（3）生成的符号串才是合式公式（也称谓词公式）

例：H(a,b),C(x)∧B(x),∀x(M(x)→H(x)),∃x(M(x)∧C(x)∧B(x)), ∀x∃y(M(x)∧ H(x,y)→L(x,y))等均是合式公式。当然以上出现的大写英文字母均是谓词符号。 38：01

二、 约束变量和自由变量

定义 5：在合式公式∀xA 和∃xA 中，x 是指导变元，A 为相应量词的作用域或辖域。在辖域中 x 的出现称为 x 在公式 A 中的约束出现；约束出现的变元称为约束变元；A 中不是约束出现的其它变元称为该变元的自由出现，自由出现的变元成为自由变元。 40：05

例一 指出各公式的指导变元，辖域、约束变元和自由变元。

(1)∀x(p(x)→∃yQ(x,y))

解：由∀x 后的（），x 是指导变元，∀x 的辖域是后面整个式子，y 是指导变元，辖域仅 Q（x，y）此部分。x 两次出现均是约束出现，y 的一次出现是约束出现，故 x，y 是约束变元，而不是自由变元。

(2)∃xF(x)∧G(x,y))

解：∃x 的辖域仅 F(x),x 是指导变元，变元 x 第一次出现是约束出现，第二次出现是自由出现，y 的出现是自由出现。所以第一个 x 是约束变元，第二个 x 是自由变元，本质上这两个 x 的含义是不同的；而 y 仅是自由变元。 45:22

(3)$\forall x(x=y\wedge x^2+x<5\rightarrow x<z)\rightarrow x=5y^2$

x^2+x 是函数不是谓词，x=y，$x^2+x<5$，x<z，$x=5y^2$ 这是四个原子公式。用逻辑词∧，→，→来联结起来的。

x 是指导变元、∀x 的辖域是（）内的这部分。因此，x 第一、二、三、四次出现是约束出现，x 第五次出现是自由出现。而 y，z 的出现均是自由出现。 47：56