例 4,判断下列函数是否是满射、单射、双射。

(1)f:N→Z,F(n)=小于 n 的完全平方数的个数

f(n)={<0、0>,<1,1>,<2,2>,<3,2>,<4,2>,<5、2>●●●}

例:f(48)=7　f(49)=7　f(50)=8,

不是单射,48,49 的像均是 7,不是满射,因负数没有原像。

如 f:N-N,则 f 是满射。

(2)f:R→R,f(a)=2a+5

"y∈R 存在 X=(Y-5)/2 使得 F(X)=Y,则 F 是满射。

如"x1,x2∈R,X1≠X2,则 2x1+5≠2x1+5,即 f(x1)≠f(x2)

所以:f 是单射　从而 F(x)=是双射

(3)f:R→Z,f(a)=[a],[a]是取整函数,表示不大于 a 的最大整数。

F 是满射,但不是单射,从而也不是双射。

(4)f:z+→R,f(n)=Lgn,z+为正整数集合。

f 不是单射也不是满射。

3、常用函数:

定义 29:

(1)f 是 A 到 B 的函数,存在一个 b∈B,使的"a∈A,f(a)=b

(2)恒等关系,集合 A 上的恒等主要是 A→A 的函数,即"a∈A,IA(a)=a,IA 是双射。

(3)单调递增函数和单调递减函数、f:R→R 的函数。

(4)特征函数:设 A 为一个集合,B I A ,子集 B 的特征。

函数 X_B 是 A→E=的映射,定义为: X_B=1,a∈B; X_B=0,a∈A-B

(5)自然映射:设 R 是 A 上的余角关系,g 是 A 到 A/R 上的映射,

即 g(a)=[a]([a]是 a 生成的等价类)称 g 是 A 到 A/R 的自然映射。

例:A={1,2,3,4},B={1,4},

则 B 的特征函数, X_B(1)=1, X_B(2)=0,X_B(3)=0, X_B(4)=1

例:A={a,b,c},R={<a,b>,<b,a>}∪IA,等价类[a]=[b]={a,b},

[c]={c},A/R={{a,b},{c}},则 g(a)=g(b)=[a],g(c)=[c]。

二、复合函数

<u>定义 30</u>:函数 f:A→B,g:B→C,则复合关系 f●g 称为函数 f 和 g 的

复合函数●

<u>定理 17</u>:设函数 f:A→B,g:B→C,则复合称 f●g 是从 A 到 C 的函数,而且 " a∈A,(f●g)(a)=g(f(a))

证:因 f 是函数, " a∈A 存在唯一 b∈B,f(a)=b,因 g 是函数存在唯一的 c 使得 g(b)=c,∴g(f(a))。而根据复合关系,<a,c>∈f●g,由此可知 " a ,存在唯一 c∈C,使得(f●g)(a)=c,所以,f●g 满足函数条件且(f●g)(a)=g(f(a))

例 5:使集合 A={a,b,c},A 上的两个函数:

F={<1,3>,<2,1>,<3,3>}, g={<1,2>,<2,1>,<3,3>}

则 f●g={<1,3>,<2,2>,<3,1>},g●f={<1,1>,<2,3>,<3,2>}

f●f={<1,2>,<2,3>,<3,1>},f●f●f={<1,1>,<2,2>,<3,3>}=IA

例 6:R 上的三个函数,f(a)=3-a,g(a)=2a+a h(a)=a/3

则(f●g)(a)=g(f(a))=g(3-a)=2(3-a)+1=7-2a

(g●f)(a)=f(g(a))=f(2a+1)=2-2a((f●g)h)(a)

=h((f●g)(a))=h(g(f(a)))=h(7-2a)=(7-2a)/3

<u>定理 18</u>:设函数 F:A→B;g:B→C ;h:D→C,则 f●(g●h)=(f●g)●h

由复合关系运算的结合中主即可以到复合函数的结合律●

<u>定理 19</u>:设函数 f:A→B ,g:B→C 则:

(1) 若 f 和 g 都是满射,则 f●g 也是满射;

(2) 若 f 和 g 都是单射,则 f●g 也是单射;

(3) 若 f 和 g 都是双射,则 f●g 也是双射。

证明: (1) " Z∈C 因 g 是满射,则存在 y∈B ,使 g(g)=z,因 f 满射,对于 y∈B,存在 x∈A,使得 f(x)=y,∴g(f(x))=z 即(f●g)(x)=z ,所以,f●g 是满射。

(2)设 x1,x2 A,X1=X2,由 f 单射,f(x1) f(x2),

设 g1=f(x1),y2=f(x2)因 g 是单射,则由 Y1 Y2 设 g(y1) g(y2)

即 g(f(x1)) g(f(x2))即(f●g)(x) (f●g)(x2)

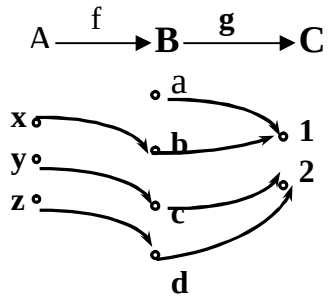
所以:f●g 是单射。

（3）由(1)(2)可以得到

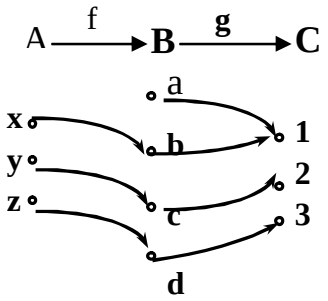
注意：

定理的递定理,并不成立,即 f●g 是满射,未必 f●g 均是满射;

f●g 是单射,未必 f●g 均是单射。



f●g 是满射,f 不是满射



f●g 是单射,g 不是单射

<u>定理 20</u>:设函数 f:A→B,g:B→C,

(1) 若 f●g 是满射,则 g 是满射●

(2) 若 f●g 是单射,则 g 是单射●

(3) 若 f●g 是双射,则 g 是双射●

证明: (1) " Z∈C 因 f●g 是满射,所以,存在 x∈A ,使 f●g(x)=z

即 g(f(x))=c,由函数的存在性,存在 y∈B,f(x)=y,

所以 g(y)=C,所以 g 是满射。

(2) " x1,x2∈A ,若 x1≠x2 ,因 f●g 单射,所以 f●g(x1)≠f●g(x2),

即 g(f(x1))≠g(f(x2)),令 y1=f(x1),y2=f(x2),y1,y2∈B,

即 g(y1)≠g(y2)。由函数的唯一性,所以 y1≠y2,即 f(x1)≠f(x2),所以 f 是单射。

(3)由(1)和(2)可得(3)

<u>定理 21</u>:设函数 f:A→B,IA 是 A 上的恒等关系●

则 IA●f=f ,f●IA=f

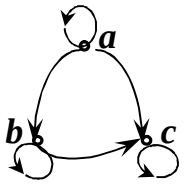
二、偏序关系

1、偏序关系

<u>定义 19</u>:设 R 是非空集 A 上的关系,如果 R 具有自反性,反对称性和传递性,则称 R 是 A 上的偏序关系,或称半序关系,把关系 R 记作≤,如果<a,b>∈≤,则记作 a≤b,读作“a 小于等于 b”.

注:定义中的“≤”不是指普通中的实数中的大小关系的≤,而是一般的偏序关系。

例 6:设集合 A＝{a,b,c},A 上的关系 R＝{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>,<c,c>},从关系图来验证 R 是半序关系。



(1)每个点均有自回路,故 a 有自反性。

(2)每两点间最多有一条弧,故有反对称性。

(3)a 能间接地通到 c,a 到 c 直接有弧。而其它没有了。故 R 有传递性,故 R 是偏序关系。

例:设 A 是非零自然数集,D_A是 A 上的整除关系。

(1)"x∈A,因 x 能整除 x,∴D_A具有自反性。

(2)"x•y ∈A,如 x 能整除 y,且 y 能整除 x,则 x＝y。

即如<x,y>∈D_A ,<y,x>∈D_A ，则 x＝y,即 D_B 具有反对称性。

(3)"x,y,z∈A,如<x,y>∈D_B ,<y,z>∈D_B ,即 x 能整除 y,y 能整除 z,则 x 能整除 z,

∴<x,z>∈D_B ，∴D_B具有传递性。，∴D_B是 A 上的偏序关系。

2、拟序关系

定义 20:设 R 是非空集 A 上的关系,如 R 具有反自反性,传递性,则称 R 是 A 上的拟序关系,记该关系 R 为＜,如<a,b>∈R,可记作 a＜b,读作“a 小于 b”。

例 7:A＝{1,2,3,4},R 是 A 上的大于关系。

R＝{<a,b>｜a＞b,a,b∈A}

则 R＝{<2,1>,<3,1>,<3,2>,<4,1>,<4,2>,<4,3>}

注:<3,1>∈R,在实数中 3 大于 1,因其是拟序关系,写作“3<1”,读作“3 小于 1”。该小于是拟序的“小于”,而不同于真正实数中的小于。

定理 16:设 R 是集合 A 上的拟序关系,则 R 是反对称性。

证明:反证。设 R 不是反对称的。则$a,b∈A,a≠b 且<a,b>∈R,<b,a>∈R,因 R 是传递的,∴<a,a>∈R,<b,b>∈R。

与 R 是反自反的,矛盾,∴R 具有反对称性。

说明:

(1)由反自反性和传递性可以推出反对称。

(2)拟序关系具有反自反性,反对称性和传递性。

(3)拟序和偏序的区别在于反自反性和自反性上。

结论：若 R 是偏序关系,则 $R-I_A$ 是拟序关系。

若 R 是拟序关系,则 $R\cup I_A$ 是偏序关系。

3、全序关系

<u>定义 21</u>:设 R 是 A 上的偏序关系,A 若"a,b∈A,

则 a≤b 和 b≤a,两者必居其一,则称 R 为 A 上的全序

关系,或称线序关系。

(1)整除关系 D,集合的包含关系Í,公式的重言蕴含关

系Þ均是偏序关系。

(2)实数中的＜,＞集合的真子集关系Ì,均是拟序关

系。

(3)实数中的≤,≥关系是全序关系。

4、哈斯图

<u>定义 22</u>:集合 A 和 A 的偏序关系≤一起称为偏序集,记

作(A,≤)。

例如自然数集 N 和 N 上的≤关系组成偏序集,记(N,≤)

非零自然数集 N 和整除关系 D_N,组成偏序集,记(N,D_N)

而事实上(N,≤)是全序集。

描述偏序集的关系图,可以简化为哈斯图,其简化规则

为:(1)所有结点的自回路均省略,只用一个空心图表

示 A 的元素。

(2)省略所有弧上的箭头,适当排列 A 中元素的位置,

如 a≤b,则 a 画在 b 的下方。

(3)如 a≤b,b≤c,则必有 a≤c,a 到 b 有边,b 到 c 有

边,则 a 到 c 的无向弧必须省略。

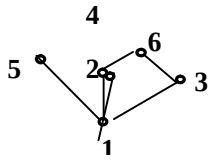
例 8,画出下列偏序集的哈斯图。

(1)({1,2,3,4,5,6}),D_A)

D_A={<1,1 >,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>,<6,6>,<1,2>,

<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>,<2,4>,<2,6>,<3,6>}

哈斯图为



①所有的自回路省略。

②箭头省略,靠位置和边决定序关系。

③1≤4,但因 1≤2,≤4,1 到 2,2 到 4 均有边。故 1 到

4 的边省略,同样 1 到 6 的边也省略。

④4≤5,5≤4 两者均不成立,4、5 的位置的高低不决

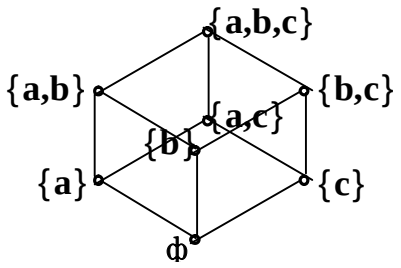
定的两者的序。

⑤该关系图共有 14 条有向弧,而哈斯图共有 6 条边,

省略了 8 条。

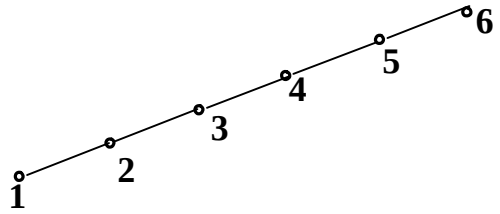
(2)A={ a , b , c },包含关系 $R_{\subseteq}$是 P(A)上的偏序关系。

则(P(A),$R_{\subseteq}$)是偏序集,其哈斯图如下:

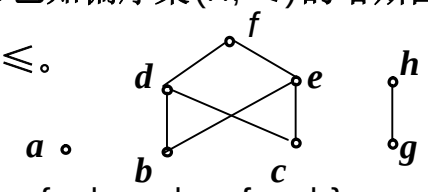


P(A)={Φ,{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}}

(3)A＝{1,2,3,4,5,6}≤是实数上的小于等于关系,因(A,≤)不仅是偏序集,而且还是全序,全序关系的哈斯图是一条线故又称线序,即任何两个元素均存在大小关系。



例 9:已知偏序集(A,≤)的哈斯图如图,写出集合 A 和关系≤。



解:A＝{a,b,c,d,e,f,g,h}

≤＝

{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,<c,e><c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>}∪I_A

5、最大元,最小元,极大元,极小元。

<u>定义 23</u>:设(A,≤)是偏序集,集合 BÍA,(B 是 A 的子集)。

(1)如存在元素 b∈B,使得"a∈B,均有 a≤b,则称 b 为 B 的最大元。

(2)如存在元素 b∈B,使得"a∈B,均有 b≤a,则称 b 为 B 的最小元。

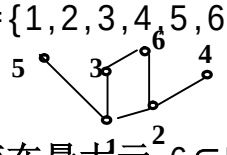
说明:①如果 A 的子集 B 存在最大元 b,则最大元是唯一的。

证明:如果 b1,b2∈B 均是最大元,由 b1 是最大元,故 b2≤b1,

而 b2 也是 B 的最大元,∴b1≤b2,∴b1＝b2,∴最大元是唯一的。

②最大元可能不存在,

例:A＝{1,2,3,4,5,6},D 是整除关系,哈斯图为



不存在最大元,6∈B,但 4≤6,5≤6 不成立。

<u>定义 23</u>:设(A,≤)是半序集,BÍA

(3)若存在元素 b∈B,"a∈B,如 b≤a,则 a＝b,称 b 为 B 的极大元。

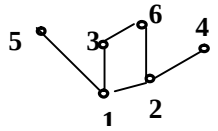
(4)若存大元素 b∈B,"a∈B,如 a≤b,则 a＝b 称 b 为 B 的极小元。

说明:

①b 是 B 的极大元,即 B 中不存在比 b 大的元素了;

②b 是极大元,b 未必是最大元,即 B 中没有比 b 大的元素,未必均比 b 小,因≤是半序,不是全序,b≤x 的元素除了 b 以外,其它均不存在了。未必说明"x∈B,如 x≤b。

③极大元未必是唯一的。例如前面例子中,4,5,6 均是极大元,但均不是最大元。



④如果 B 是有限集,则 B 必存在极大元。

⑤如果 B 存在最大元 x,则 x 就是 B 的极大元,此时极大元也只有这一个 x 了。

⑥孤立点则又是极大元,也是极小元。