§4.2 关系的运算

一、 关系的集合运算:

关系是有序对集合,集合的运算对关系仍然适用。

定理 1:设 R 和 S 是从 A 到 B 的两个关系,则 RÈS,RÇS,R-S,~R,RÅS 仍是从 A 到 B 的关系。

二、 复合关系:

引例:a,b,c 三人,a,b 是兄妹关系,b,c 是母子关系

则 a,c 是舅甥关系,如设 R 是兄妹关系,S 是母子关系则 R 与 S 的复合 T 是舅甥关系,而 S 与 T 复合是母女关系。

如 R 是父子关系,R 与 R 复合是祖孙关系了。

5:40

1、 复合关系的定义(关系的复合运算)

定义 7:设 A,B,C 是三个集合,R 是 A 到 B 的关系,S 是 B 到 C 的关系,则 R 与 S 的复合关系是一个 A 到 C 的关系,记作 R·S,

定义为 R·S={<x,z>½x ÎA,z ÎC,$y ÎB,

使<x,y> ÎR,<y,z> ÎS}

说明:<1>R 与 S 能进行复合的必要条件是 R 的值域所属集合 B 与 S 定义域所属集合 B 是同一个集合,否则就不能复合。

<2><x,z>有这个复合关系的定义为至少有一个中间桥梁的元素 y,使 x,y 有关系 R,y,z 有关系 S 11:01

例 2:A={1,2,3,4,5} B={3,4,5},C={1,2,3},R 是 A 到 B 的关系,S 是 B 到 C 的关系。

R={<x,y>|x+y=6}={<1,5>,<2,4>,<3,3>}

S={<y,z½y- z=2} ={<3,1>,<4,2>,<5,3>}

从有序对中搜索

∵<1,5>∈R,<5,3>∈S,∴<1,3>∈R·S

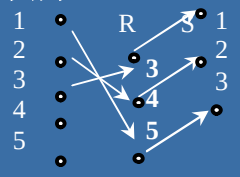
∵<2,4> ÎR,<4,2> ÎS,∴<2,2> ÎR·S

∵<3,3>ÎR,<3,1>ÎS,∴<3,1>ÎR·S

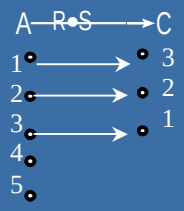
从而 R·S={<1,3>,<2,2>,<3,1>}

另可以用推导：∵x+y=6,y-z=2,消去 y 得 x+z=4　16：31

关系图为 A⟶B⟶C



从而 R·S 的关系图



19:14

例 3:集合 A={a,b,c,d,e}

R={<a,b>,<c,d>,<b,b>},S={<d,b>,<b,e>,<c,a>}

则 R·S={<a,e>,<c,b>,<b,e>}

S·R={<d,b> ,<c,b>}

R·R={<a,b>,<b,b>}

S·S={<d,e>}

从例中可得 R·S¹SR

25:05

说明:关系的复合运算不成立交换律

<1>　R 是 A 到 B 的关系，S 是 B 到 C 的关系,R·S 是有定义，而 S·R 根本不能复合

<2>　如 A=C,则 R·S 是 A 上的关系,S·R 是 B 上的关系根本不可能相等

<3>　如 A=B=C,R,S 均为 A 上的关系,R·S 和 S·R 也是 A 上的关系,一般地 R·S¹S·R。从例子中可以看出。

29：25

2、 复合关系的关系矩阵

布尔运算,其运算{0,1}®{0,1}的运算

加法:0+0=0,0+1=1+0=1,1+1=1

乘法:0×0=0,0×1=1×0=0,1×1=1

定理:设集合 $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$,$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$ $C=\{C_1,\cdots,C_P\}$

R 是 A 到 B 的关系,其关系矩阵 M_R 是 m×n 阶矩阵

S 是 B 到 C 的关系,其关系矩阵 M_S 是 n×p 阶矩阵

复合关系 R·S 是 A 到 C 的关系,其关系矩阵

$M_{R\cdot S}$ 是 m×p 阶矩阵则 $M_{R\cdot S}=M_R\times M_S$ 。

其中×是按布尔运算进行的矩阵乘法。

34：48

例 4:例 2 中的关系

A={1,2,3,4,5}　B={3,4,5}　C={1,2,3}

R={<1,5>,<2,4>,<3,3>}　S={<3,1>,<4,2>,<5,3>}

R·S={<1,3>,<2,2>,<3,1>}

$$M_R=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad M_S=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_R\times M_S=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=M_{R\cdot S}$$

R·S={<1,3>,<2,2>,<3,1>}

39：10

例 5:设集合 A={a,b,c,d},R={<a,b>,<c,d>,<b,b>},

S={<d,b>,<b,d>,<c,a>,<a,c>}

$$M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad M_S=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$M_{R\cdot S}=M_R\times M_S$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \qquad = \qquad 41:33$$

$$M_S \times M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

验证:R•S={<a,d>,<b,d>,<c,b>}

S•R={<a,d>,<c,b>,<d,b>}　　43：04

3、复合关系的性质:

<1>复合运算对∪,∩的分配律

定理 2:设 R 是从集合 A 到 B 的关系,S 和 T 均为 B 到 C 的关系。U 是 C 到 D 的关系,则

(1)R•(S∪T)=R•S∪R•T;

(2)R•(S∩T)= R•S∩R•T;

(3)(S∪T)•U=S•U∪T•U;

(4)(S∩T)•U=S•U∩T•U。

44：50

证明:(1)"<x,z>∈R•(S∪T)

Þ $y∈B,<x,y>∈R∧(y,z)∈S∪T

Þ<x,y>∈R∧(<y,z>∈S∨<y,z>∈T)

Þ(<x,y>∈R∧<y,z>∈S)∨(<x,y>∈R∧<y,z>∈T)

Þ<x,z>∈R•S∨<x,z>∈R•T)

Þ<x,z>∈R•S∪R•T

从而　R•(S∪T)ÍR•S∪R•T

以上各步均可逆 ,从而 **R•S∪R•TÍ R•(S∪T)**

∴(1)成立。

48:03

作业:

P83 练习 3.3(A)3(1)(2),4,7(1),8

P90 习题三:11(1)(2)(4),10(2),(4),12(8)