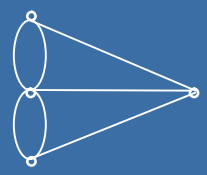
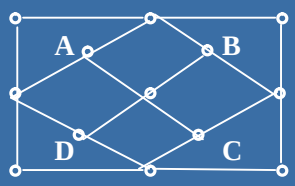
推论：非平凡图 G 含有欧拉通路的充分必要条件是 G 最多有两个奇数度点。

（1） 如均是偶数度点，则 G 存在欧拉回路，则该图是起终点相同的一笔画。

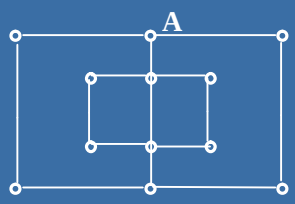
（2） 如两个点度数为奇数其它均为偶数，则存在 Euler 通路该图是起终点不同的一笔画，两个奇数度点分别作起终点，它不存在欧拉回路，不是 Euler 图。

（3） 如只有一个点是奇数度点，其它均为偶数度点，这种图是不存在的。由此可见七桥问题无解的。

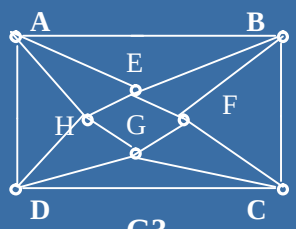




G1



G2



G3

G1 中 A,B,C,D 四点度数为 3，故不是 Euler 图，也不是一笔画；

G2 中 A,B 两点是 3 度，其它均为偶数点，故不是 Euler 图，但是起终点不同的一笔画，起终点分别是 A,B；

G3 中点的度数均为 4，且连通，故它是 Euler 图，Euler 回路为 ABCDAHDGCFBEHGFEA。在回路中各点均出现 2 次(起终点多一次)，因此每点均为 4 度。

注：Euler 回路不是唯一的。

二、中国邮路问题：

1、 问题：一个邮递员从邮局出发，走遍所有街道，把邮件送到每个收件人手中，最后回到邮局，要怎样走，使全程路线最短。

2、 转化为图论问题：以街道为边，以街道交叉点为结点，以街道的长度为边上的权，在权图 G=<v,E,W>上，找出一个经过所有边至少一次的回路，并使得该回路的权和达到最小。

说明：1、该回路未必是 Euler 回路，边允许重复。

2、管梅谷提出了这个问题，并指出如果图 G 有 m 条边，则所求回路至少是 m 条边，最多不超过 2m 条边，并且每边在回路中至多出现两次。

3、 算法：

①若图 G 不含奇数度点，则该图的一条 Euler 回路就是问题的解，权和就是各边的权和。

②若图 G 只有两个奇数度点 u,v,则 G 中存在 Euler 通路 C,u,v 分别是起终点。再用狄克特算法求出 u 到 v 的最短路,将 Euler 通路再接上 u 到 v 的最短路,成为一个回路,此回路在 u 到 v 最短路上的边经过二次,因此该回路的权和等于 G 的各边权之和再加上 u 到 v 的最短路的权和。

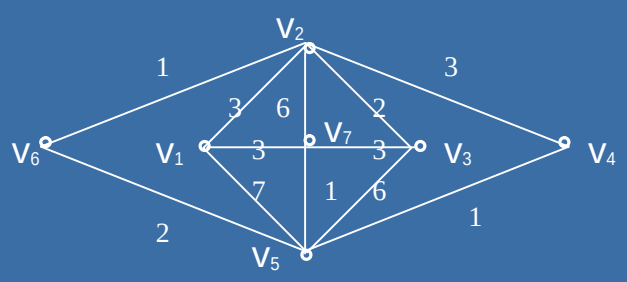
③若图 G 含有 2k(k>0)个奇数度点,先求出这 2k 个点的任意两点间的最短路,(共有 C_{2k}^{2} 个)然后在这些通路中找出 k 条通路 $P_1,\cdots,P_k$,满足两条<1>任何 P_i,P_j 没有相同的起终点,(正好接住这 2k 个点)<2>使找出的 k 条通路在满足<1>的条件下权和最小。(这是后面最优生成树的算法)

④根据③求出的 k 条通路在原 G 图上复制出来 k 条通路上的边(即一条边平行地再画一条边)得到图为 G″

⑤ 该图 G′ 的所有点的度数成为偶数,因而求出 G′ 的 Euler 回路就是问题的解。

路就是能求的路。

例题:如图,七个点中, 四个点是奇数度点:deg(V_1)=3, deg(V_2)=5, deg(V_3)=3, deg(V_5)=5,

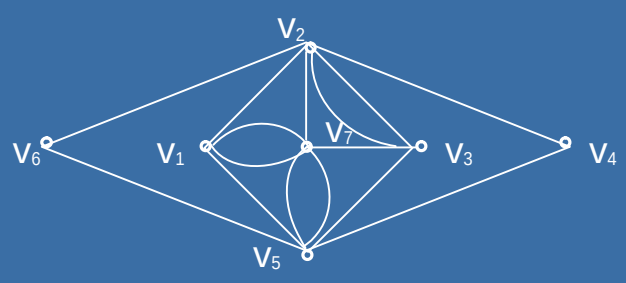


四个奇数度点,两两找出最短路

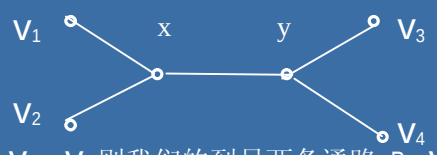
d(V_1,V_3)=5, d(V_1,V_2)=3, d(V_1,V_5)=4, d(V_2,V_3)=2, d(V_2,V_5)=3, d(V_3,V_5)=4

找两条路使权和最小且 4 个点分别作为起终点。

P_1=V_2V_3, P_2=$V_1V_7V_5$, **权和为 6**



我们注意到新加的两条路，没有边是重复的，这是权和最小要求的必然结果，反证，如有两条边权和最小，且这 4 个点为起终点，如图，其有一段 xy 是公共的。

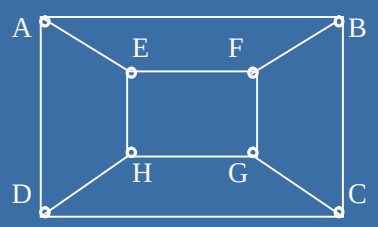


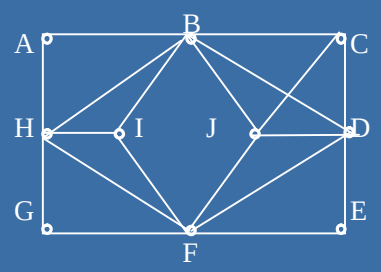
两条路是 P_1:V_1xyV_3，P_2:V_2xyV_4 则我们的到另两条通路，P_3:V_1xV_2，P_4:V_3yV_4

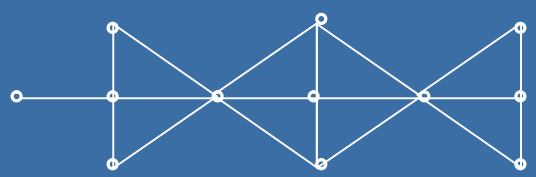
§6.2 哈密尔顿图和货郎担问题

一、 哈密尔顿图

定义 2：经过每个结点一次且仅一次的通路(回路)称为哈密尔顿通路(回路)，存在哈密尔顿回路的图称为哈密尔顿图。

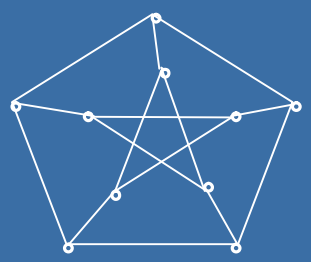






定理 3：设无向图 G=<V,E>是哈密顿图，V_1 是 V 的任意非空子集，则有 $P(G-V_1)\leqslant|V_1|$，其中 $P(G-V_1)$是从 G 中删去点子集 V_1 及所有与 V_1 的点相关联的边后的连通分支数。

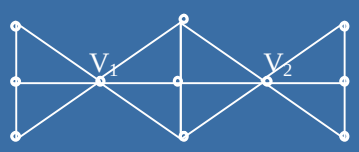
注：①此定理是必要条件而不是充分条件。如下图：



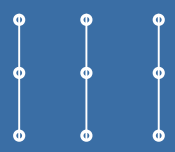
称为彼得森图，而不是哈密顿图。

②必要条件可以证明一个图不是哈密尔顿图。

应用举例:



G_1

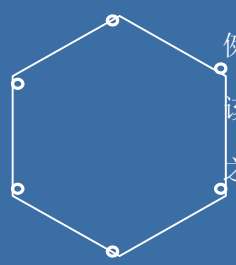


$G_1-\{V_1, V_2\}$

令 $V_1=\{V_1,V_2\}$，G_1 有两个割点 V_1,V_2，$P(G-V_1)=3$，而 $|V_1|=2$ 不满足定理的必要条件，故不是哈密顿图。

定理 4：设 G=<V,E>,为无向简单图,如 G 中任意两个结点的度数之和大于等于|V|,则 G 是哈密尔顿图。

说明：该定理是充分条件但不是必要的。



例如：

该六边形是哈密顿图，但每个节点是 2 度数之和为 4，点的数目等于 6。

定理 5：设有向图 D=<V,E>,|V|=n≥2

如果所有的有向边均用无向边代替,所得无向图中含有生成子图 k_n,则该无向图中存在哈密尔顿通路。

推论:|V|≥3 的有向(无向)完全图为哈密尔顿图。

二、 货郎担问题：

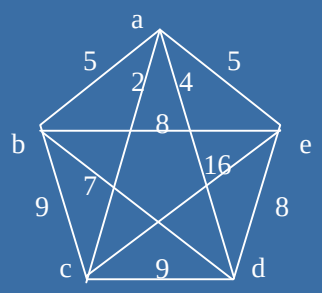
1. 问题的提出:今有 n 个城市,任意两个城市之间均有路,今有一个售货员从某个城市出发要经过其它 n-1 个城市恰一次,最后回到出发城市,问如何走使得经过的总路程最短。
2. 转化为图论问题：以城市为结点,两城市之间的路为边,路程长度为边上的权,则问题转化为在带权无向图 G=<V,E,W>中找一个权和最小的哈密尔顿回路。
3. 最邻近法：此法不是一个最有效的方法,是一种近似算法。设 G=<V,E,W>是带权无向图,

共有 n 个结点，

1)任取一点纪为 v1，在其余 n-1 个点中，找出最邻近 v1 的点，记为 v2 形成初级通路 v1v2

2)在其余 n-2 个点中，找出最邻近 v2 的点，记作 v3，形成初级通路 v1v2v3，如此一直下去直到找到一条哈密尔顿回路为止

此算法与初始点的选取有关，误差往往很大。



例：如图为 K5

1. 以 a 为起点，回路为 adbeca，权和为 47；
2. 以 b 为起点，回路为 badecb，权和为 42；
3. 以 c 为起点，回路为 cbadec，权和为 42；
   回路为 cdaebc，权和为 35；
4. 以 d 为起点，回路为 dabced，权和为 42；
   回路为 daebcd，权和为 35；
5. 以 e 为起点，回路为 eadbce，权和为 48；

图中最短哈密顿回路为 35，最长哈密顿回路为 48,误差很大。