三、反函数

于是 A ® B 的函数,当然 f 是 A 到 B 的关系,

f 的逆关系一般不满足函数的要求,如 f 是满射,

则 f^{-1} 满足函数的存在性,如 f 是单射,则 f^{-1}

满足函数的唯一性,如 f 是双射,则 f^{-1} 才满足

函数的要求:存在性和唯一性。

例: A={a,b},B={1,2,3}

f={<a,3>,<b,3>,<c,1>} f 不是单射不是满射。

f^{-1}={<3,a>,<3,b>,<1,c>} f^{-1} 不满足函数的存在性。

因 2 没有像,不满足唯一性,3 有两个像

所以:f^{-1} 不是函数。

定义 30:设函数 f:A ® B 是双射,则将 f 的递关系 f^{-1}

称为 f 的反函数(或称递映射)。

记作:f^{-1} :B ® A

定理 22:设 f 是 A B 的双射,则 f^{-1} 是 B ® A 的双射.

定理 23:如果函数 f:A ® B 是双射,则

(1)$f \cdot f^{-1}=I_A$, $f^{-1} \cdot f=I_B$

(2)$(f^{-1})^{-1}=f$

结论:f:A ® B,g:B ® A,则 $f \cdot g=I_A$,$g \cdot f=I_B$

的充分必要条件是 $g = f^{-1}$

定理 24:设函数 f:A ® B,g:B ® C,且 f,g 均是双射,

则有$(f \cdot g)^{-1}=g^{-1} \cdot f^{-1}$。

证明:两边均是 C ® A 的映射。

"z Î C ,存在 X,使得$(f \cdot g)^{-1}(z)=x$,即$(f \cdot g)(x)=z$

g(f(x)) =z,令 y=f(x),则 g(y)=z

所以:$X=f^{-1}(y)$ $y=g^{-1}(z)$ 所以$(g^{-1} \cdot f^{-1})(z)=f^{-1}(g^{-1}(z))$

$=f^{-1}(y)=x=(f \cdot g)^{-1}(z)=f$ 所以:$g^{-1} \cdot f^{-1}=(f \cdot g)^{-1}$

第三篇 图论

第 5 章 图的基本概念

§5.1 图的基本概念

一、 图的意义：

定义 1：一个图是一个有序对<V,E>,记为 G=<V,E>,

其中

1、 $V=\{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$为有限非空集合,

V_i 称为结点,简称点 V 是点集。

2、 $E=\{e_1, \cdots, e_m\}$为有限的边集合,e_i 称为边,

每个 e_i 都有 V 中的结点对与之相对应,称 E 为边集。

即每条边是连结 V 中的某两个点的。

如果 E 中边 e_i 是对应 V 中的结点对是无序的(u,v)

称 e_i 是无向边,记 e_i =（u,v）,称 u,v 是 e_i 的两个端点。

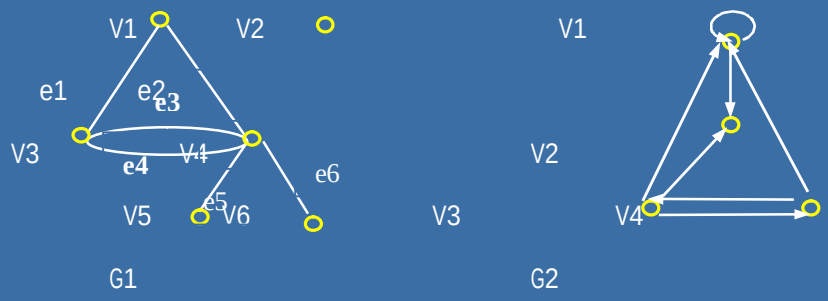
如果 e_i 与结点有序对(u,v)相对应,称 e_i 是有向边,

记 e_i =<u,v>,称 u 为 e_i 的始点,v 为 e_i 的终点。

① 每条边均为无向边的图称为无向图

② 每条边均为有向边的图称为有向图

③ 有些边是无向边，有些边是有向边的图称为混合图。



G1=<V1,E1>是无向图 其中 V1={V1,V2,V3,V4,V5,V6}

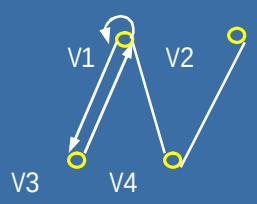
E={e1,e2,e3,e4,e5,e6}

e1=<V1,V3> e3=<V3,V4> e4=<V3,V4>等

G2=<V2,E2>是有向图 其中 V2={V1,V2,V3,V4}

E={<V3,V1>,<V3,V2>,<V1,V1>,<V1,V2>,

<V4,V1>,<V3,V4>,<V4,V3>}



G3

G3=<V3,e3>是混合图

V3={V1,V2,V3,V4}

E3={<V1,V1>,<V1,V3>,<V3,V1>,<V1,V2>,<V4,V2>}

点和边的关联:如 e_i =(u,v)或 e_i=<u,v>称 u,v 与 e_i 关联

点与点的相邻:如 e_i =(u,v)或 e_i=<u,v>称 u,v 两点相邻,或称 u,v 是邻接点。

边与边的邻接:关联于同一个点的边称这些边为邻接边。

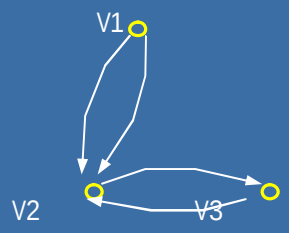
自回路（环）:一条边的两个关联的点是同一点的边称为自回路,或称为环。

孤立点:与任何边均不关联的点称为孤立点。

零图:仅有孤立点的图。

平凡图:仅有一个孤立点的图。

平行边:在有向图中,始点和终点均相同的边称为平行边,无向图中若两点间有多条边,称这些边为平行边,两点间平行边的条数称为边的重数。



图中 V2,V3 间的边不是平行边。

二、 点的度数:

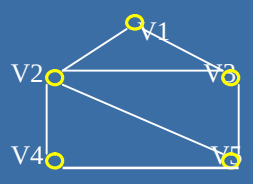
定义 2:在图 G=<V,E>,vÎV,与 v 关联的边的条数称为该点的度数,记为 deg(v)。

在有向图 G=<V,E>中,vÎV,

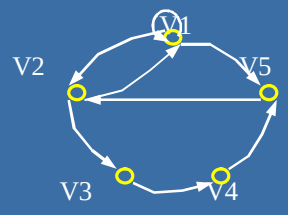
以 v 为始点的边的条数称为该点的出度，记作 $deg^+(v)$；

以 v 为终点的边的条数称为该点的入度，记作 $deg^-(v)$。

显然有 $deg(v)=deg^+(v)+deg^-(v)$



G1



G2

如图：G1 是无向图

deg(v1)=2，deg(v2)=4

G2 是有向图，$deg^+(v1)=3$，

$Deg^-(v1)=2$，deg(v)=5，孤立点的度数为 0。

图 G 最大度数记为 (G)，最小度数记为 d (G)。

例中 (G1)=4，d (G1)=2， (G2)=5，d (G2)=2

定理 1：图 G=<V，E>中，结点度数和等于边数的二倍。

即 $\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$

该定理又称握手定理

推论：在任何图中，度数为奇数的结点的个数必为偶数。

定理 2：在有向图中所有结点的入度和等于所有

结点的出度之和。

三、 完全图和补图

定义 3：不含平行边和环的图称为简单图。

定义 4：

1. G=<V，E>为具有 n 个结点的无向简单图，若每一个

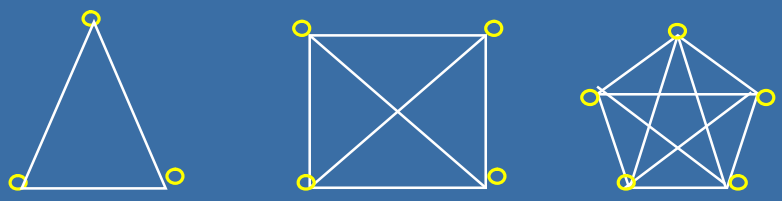
结点均有边相连，则称该图为无向图，简称完全图，记为 K_n。

2. G=<V，E>为具有 n 个结点的有向简单图，若对每一

对结点间均有方向的两边相连，则称该图为有向完全图。

无向完全图的边数为 $C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$，

有向完全图的边数为 P_n^2=n(n-1)。



K3 **K4** **K5**

定义 5:（补图的定义）G=<V,E>为具有 n 个结点的简单图,由 G 中所有结点和所有能 G 成为完全图的添加边组成的图,称为 G 的补图,或（G 的补）记为 $\overline{G}$。

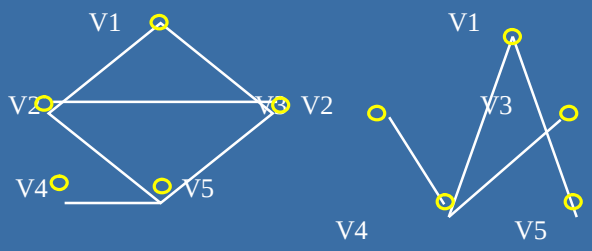
其中 G 为有向图时,它的完全图是有向完全图,

G 为无向图时,它的完全图为无向完全图 K_n,

即 G=<V_1,E_1>, $\overline{G}$=<V_2,E_2>

其中 V_2=V_1,E_2={(u,v)|u,vÎV,(u,v)ÏE$_1$}

例:



G $\overline{G}$